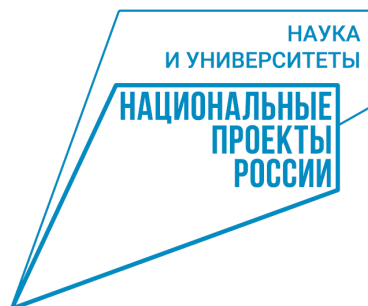


# Летняя математическая школа "Алгебра и геометрия"

30 июля – 4 августа 2024 г., г. Суздаль

ПОСТЕРНЫЕ ДОКЛАДЫ



Steklov International Mathematical Center



# Асимптотика числа выпуклых триангуляций проективной плоскости с тремя разными особыми точками

Вахрина Анастасия Олеговна  
Научный руководитель: Н.С. Калинин  
МКН СПбГУ

## Основные понятия

**Определение.** Назовём дефектом вершины триангуляции число  $(6 - k)\pi/3$ , где  $k$  — количество треугольников, содержащих данную вершину.

**Определение.** Назовём триангуляцию  $\mathbb{RP}^2$  правильными треугольниками выпуклой, если дефект каждой вершины триангуляции неотрицательный.

В данной работе мы рассматриваем выпуклые триангуляции  $T$  проективной плоскости  $\mathbb{RP}^2$  такие, что все вершины  $T$ , кроме трёх, имеют валентность 6, а три вершины  $A, B, C$  имеют валентности 3, 4 и 5. Понятие такой триангуляции на сферу даёт центрально-симметричный октаэдр  $F$  с индуцированной на нём метрикой, плоской везде, кроме 6 точек.

Проекция рёбер  $F$  дают 6 геодезических путей на  $\mathbb{RP}^2$  между вершинами  $A, B, C$ , которые делят  $\mathbb{RP}^2$  на 4 треугольника  $ABC$ . Выберем один из этих треугольников и обозначим его  $\Delta$ .

**Определение.** Назовём фиксированные триангуляции  $(T_1, A_1, B_1, C_1, \Delta_1)$  и  $(T_2, A_2, B_2, C_2, \Delta_2)$  изоморфными, если существует биекция  $\mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  такая, что  $T_1 \mapsto T_2$ , причём  $A_1 \mapsto A_2, B_1 \mapsto B_2, C_1 \mapsto C_2$  и  $\Delta_1 \mapsto \Delta_2$ .

## Историческая справка

В статье [1] было впервые в должной мере осознано, что работа Тёрстона [2] позволяет свести задачу об асимптотике числа выпуклых триангуляций двумерной сферы ровно с  $n$  (соответственно, не более, чем с  $n$ ) треугольниками к задаче подсчета целых точек на определенном гиперboloиде (соответственно, под гиперboloидом) внутри фундаментальной области определенной дискретной группы (группы изометрий комплексного гиперболического пространства). При этом результаты статьи [3] сразу дают объем соответствующей фундаментальной области под гиперboloидом. После этого задача об асимптотике числа точек под гиперboloидом (т.е. числа триангуляций с не более, чем  $n$  вершинами) сразу решается — она сводится к вычислению определителя решетки целых точек (см. также статью [4]).

В случае же проективной плоскости несложно заметить, что сумма дефектов всех вершин триангуляции в точности равна  $2\pi$ , так как эйлера характеристика проективной плоскости суть 1. В случае ровно трёх вершин с положительным дефектом это даёт нам три возможные ситуации: дефекты  $2\pi/3, 2\pi/3, 2\pi/3$  (все три вершины содержатся ровно в 4 треугольниках), дефекты  $\pi/3, \pi/3, 4\pi/3$  (две вершины содержатся в 5 треугольниках, а одна — в 2 треугольниках) и дефекты  $\pi, 2\pi/3, \pi/3$  (вершины содержатся в 3, 4 и 5 треугольниках). Первый случай разобран в статье [5], второй — в работе [6], данная же работа закрывает последний случай.

## Основной результат

**Теорема.** Количество  $f(n)$  классов изоморфности фиксированных триангуляций  $\mathbb{RP}^2$ , состоящих не более чем из  $n$  треугольников, удовлетворяет выражению

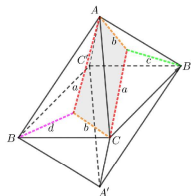
$$f(n) = \frac{\sqrt{3}}{80} \left( L\left(\frac{\pi}{2}\right) + L\left(\frac{\pi}{3}\right) + L\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \cdot \zeta^{-1}(4)\zeta(\text{Eis}, 2)n^2 + O(n^{3/2}).$$

где  $L(x) = -\int_0^x \log |2 \sin(x)| dx$  — функция Лобачевского, а  $\zeta(L, s) = \sum_{\gamma \in L \setminus \{0\}} |\gamma|^{-s}$  — дзета-функция Эпштейна.

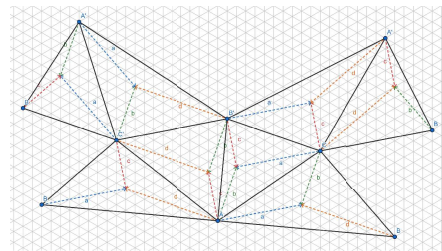
## Идеи доказательства

Согласно работе [7],

**Лемма.** Октаэдр  $F$  с вершинами  $A, B, C, A', B', C'$  можно разбить на параллелограммы со сторонами  $(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)$  и углами между ними  $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$  соответственно (по две копии каждого параллелограмма).



Нарисуем развёртку октаэдра на треугольной решётке Эйнштейна:



Оказывается, что такую развёртку можно однозначно задать одним примитивным вектором решётки и четвёркой натуральных чисел. А тогда количество треугольников на развёртке можно вычислить через площадь октаэдра, и подсчёт асимптотики сводится к вычислению количества целых точек под некоторой поверхностью, заданной квадратичной формой в четырёхмерном пространстве.

## Выводы и дальнейшие направления исследований

В дальнейшем было бы интересно решить аналогичную задачу в размерности 3 для проективного пространства  $\mathbb{RP}^3$ , где линии вершин будут уже изученными триангуляциями двумерной сферы.

## Список литературы

- [1] P. Engel, P. Smillie. The number of convex tilings of the sphere by triangles, squares, or hexagons, *Geometry & Topology* 22 (2018) 2839–2864, arXiv:1702.02614
- [2] W. P. Thurston, Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere, from "The Epstein birthday schrift"(I Rivin, C Rourke, C Series, editors), *Geom. Topol. Monogr.* 1, *Geom. Topol. Publ.*, Coventry (1998) 511–54
- [3] C. T. McMullen, The Gauss–Bonnet theorem for cone manifolds and volumes of moduli spaces, preprint (2013)
- [4] А. Д. Рухович, О росте числа фуллеренов, *УМН*, 73:4(442) (2018), 177–178
- [5] Mikhail Chernavskikh, Altan Erdnigor, Nikita Kalinin, Alexandr Zakharov. Equilateral convex triangulations of  $\mathbb{RP}^2$  with three conical points of equal defect. arXiv preprint, arXiv:2111.04680v3, 2022
- [6] Мария Ханина. Асимптотика числа триангуляций проективной плоскости. Выпускная квалификационная работа, СПбГУ, 2023
- [7] Z. Wang. Shapes of centrally symmetric octahedra with prescribed cone-deficits. *Advances in Geometry*, 21(2):179–185, 2021.

# О ВЗАИМНЫХ РАСПОЛОЖЕНИЯХ КУБИКИ И ПАРЫ КОНИК В ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Горская Виктория

НИУ ВШЭ, Нижний Новгород

Задача классификации расположений в вещественной проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$  ветвей распадающихся алгебраических кривых является одной из задач, инициированных первой частью 16-й проблемы Гильберта о топологии неособых алгебраических кривых. Список работ о топологии распадающихся алгебраических кривых, опубликованных до 2019 года, приведен в [1]. Эта задача о распадающихся кривых, как и задача Гильберта о неособых кривых, нетривиальна начиная со степени 6.

Некоторые сведения из теории плоских алгебраических кривых:

**Определение 1.1.** *Плоской вещественной проективной алгебраической кривой  $C_m$  степени  $m$  называется однородный многочлен  $C_m(x_0, x_1, x_2)$  степени  $m$  с вещественными коэффициентами от трёх переменных  $x_0, x_1, x_2$ , рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя.*

**Определение 1.2.** *Множество  $\mathbb{R}C_m$  ( $\mathbb{C}C_m$ ) точек вещественной (комплексной) проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$  ( $\mathbb{C}P^2$ ) с координатами  $(x_0 : x_1 : x_2)$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$  ( $(z_0, z_1, z_2), z_i \in \mathbb{C}$ ), удовлетворяющими уравнению  $C_m = 0$  называется множеством вещественных (соответственно, комплексных) точек кривой  $C_m$ .*

**Определение 1.3.** *Кривая  $C_m$  называется неособой, если первые частные производные многочлена  $C_m(x_0, x_1, x_2)$  по переменным  $x_0, x_1, x_2$  не обращаются одновременно в нуль (в  $\mathbb{C}P^2$ ).*

Оценку числа  $N$  вещественных ветвей кривой степени  $m$  даёт классическая:

**Теорема 1.1** (Теорема Харнака (1876))  $N \leq \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$ , и эта оценка точная для любого  $m$ .

**Определение 1.4.** *Множество  $\mathbb{R}C_m$ , рассматриваемое с точностью до изотопии в  $\mathbb{R}P^2$ , называется вещественной схемой кривой  $C_m$ . Неособые кривые с максимально возможными по теореме Харнака числом ветвей называются  $M$ -кривыми, а их схемы –  $M$ -схемами.*

Таким образом, вещественная схема  $M$ -кривой степени 2 представляет собой один овал (окружность, вложенную в  $\mathbb{R}P^2$  двусторонне), а вещественная схема  $M$ -кривой степени 3 состоит из двух компонент связности, одна из которых – овал, а вторая – нечётная ветвь (окружность, вложенная в  $\mathbb{R}P^2$  односторонне).

Цель работы – найти топологическую классификацию (точнее, список попарно различных вещественных схем) кривых степени 7, распадающихся на кубики и две коники (т. е. определяемых многочленом вида  $C_7 = C_3 \cdot C_2 \cdot \tilde{C}_2$ ), предполагая выполнение следующих условий максимальности и общего положения:

- (i)  $C_3, C_2$  и  $\tilde{C}_2$  являются  $M$ -кривыми;
- (ii) каждая две из указанных в (i) кривых пересекаются без касания в максимально возможном (по теореме Безу) числе вещественных точек, т. е.  $\#(\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}C_2) = \#(\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}\tilde{C}_2) = 6, \#(\mathbb{R}C_2 \cap \mathbb{R}\tilde{C}_2) = 4$ ;
- (iii)  $\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}C_2 \cap \mathbb{R}\tilde{C}_2 = \emptyset$ , т. е. ни через какую точку не проходят все три кривые-сомножители;
- (iv) все точки пересечения кубики с кониками лежат на нечётной ветви кубики;
- (v) для каждой из коник  $C_2, \tilde{C}_2$  все шесть общих точек нечётной ветви кубики с коникой лежат на одной из четырех дуг, на которые эта коника делится точками пересечения со второй коникой, причём эта дуга внешняя, т. е. лежит вне другой коники.

Общая схема решения этой задачи следующая: перечислить допустимые модели, т. е. перечислить все попарно различные топологические модели кривых указанного вида, которые удовлетворяют топологическим следствиям теоремы Безу относительно пересечений с прямой (т. е. не влекут наличия прямой, пересекающей модель более, чем в семи точках) и удовлетворяют известным ограничениям на взаимные расположения кубики и коники и взаимные расположения пары коник; выяснить для каждой из допустимых моделей, может или не может она быть реализована как множество вещественных точек вещественной алгебраической кривой степени 7.

Поскольку допустимых моделей оказалось довольно большим, естественно разбить их на группы. В [2] рассматривались расположения, удовлетворяющие, кроме условий (i) – (v) выше, дополнительному условию

(vi) *точка пересечения нечётной ветви кубики с разными кониками не перемежаются, т. е. можно так монотонно двигаться по нечётной ветви кубики, что сначала проходятся шесть точек пересечения с одной коникой, а затем – со второй.*

**Теорема 1.2.** *Алгебраическими кривыми степени 7 реализуются ровно 7 попарно топологически различных моделей расположений, удовлетворяющих условиям (i) – (vi). Эти модели показаны на рис.1<sup>1</sup>.*

В [3] рассматривались расположения, удовлетворяющие, кроме условий (i) – (v) выше, дополнительному условию (vii), противоположному условию (vi):

<sup>1</sup> Здесь и ниже на рисунках в качестве модели вещественной проективной плоскости используется круг, диаметрально противоположные точки граничной окружности которого, изображаемой пунктиром, считаются отождествлёнными.

(vii) точки пересечения нечётной ветви кубики с разными кониками перемежаются, т. е. нельзя так монотонно двигаться по нечётной ветви кубики, что сначала проходятся шесть точек пересечения с одной коникой, а затем со второй.

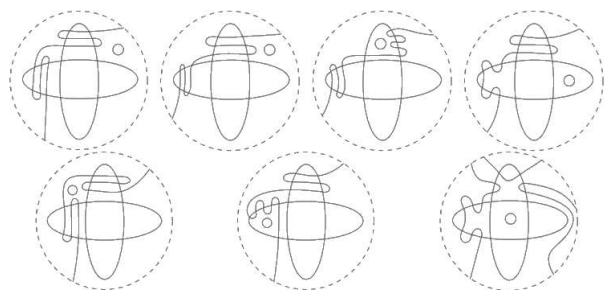


Рис. 1

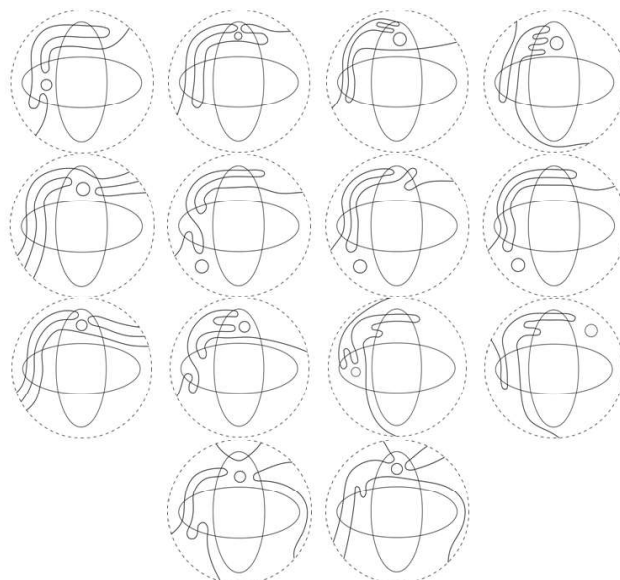


Рис. 2

**Теорема 1.3.** Алгебраическими кривыми степени 7 реализуются ровно 14 попарно топологически различных моделей расположений, удовлетворяющих условиям (i) – (v), (vii). Эти модели показаны на рис. 2.

В подготовленной к печати статье «О плоских вещественных кривых степени 7, распадающихся на пару коник и кубик» рассматривались расположения, удовлетворяющие, кроме условий (i) – (iv) выше, дополнительному условию

(viii) все шесть общих точек нечётной ветви кубики с одной из коник лежат на одной из четырёх дуг, на которые эта коника делится точками пересечения со второй коникой, причём эта дуга внешняя; для другой коники шесть общих точек с нечётной ветвью кубики лежат на её двух внешних дугах.

**Теорема 1.4.** Алгебраическими кривыми степени 7 реализуются 10 попарно топологически различных моделей расположений, удовлетворяющих условиям (i) – (iv), (viii). Эти модели показаны на рис. 3, а вопрос о реализуемости двенадцати оставшихся (рис. 4) открыт.

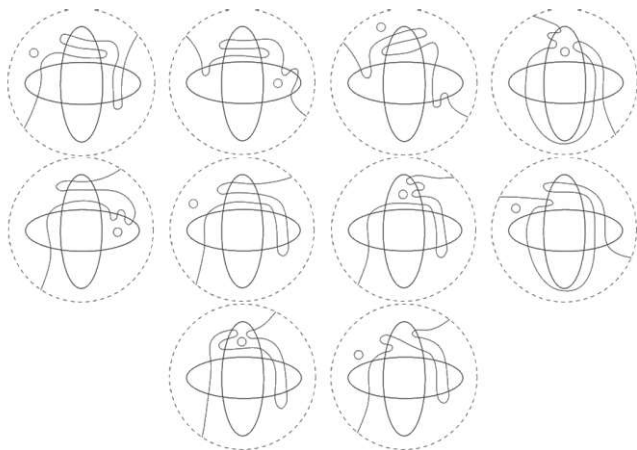


Рис. 3

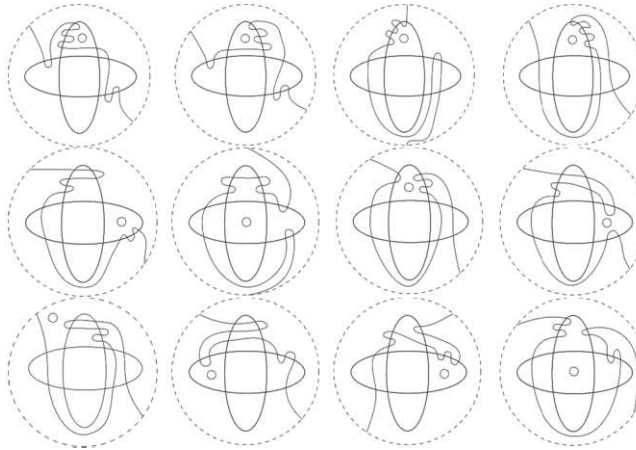


Рис. 4

### Список литературы

1. Борисов И. М., Полотовский Г. М. О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8 // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 176. С. 3-18.
2. Горская В. А., Полотовский Г. М. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости // Журнал Средневолжского математического общества. 2020. Т. 22. № 1. С. 24-37.
3. Горская В. А. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости. II // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. № 3. С. 61-76.

# Генераторы и торический морфизм Фробениуса

Ринат Досаев  
rrdosaev@gmail.com

В этом постере я бы хотел рассказать об одном сюжете, связанном с производными категориями когерентных пучков гладких торических многообразий и стэков. Производную категорию многообразия удобно описывать в терминах полных исключительных наборов, если такие в ней есть. Начнем с напоминания определений. Пусть  $\mathcal{T}$  –  $\mathbb{k}$ -линейная триангулированная категория.

**Определение 1.** Объект  $E \in \mathcal{T}$  называется *исключительным*, если имеется изоморфизм  $\mathrm{Hom}^\bullet(E, E) \cong \mathbb{k}$ .

**Определение 2.** Набор исключительных объектов  $E_1, E_2, \dots, E_n$  называется *исключительным*, если  $\mathrm{Hom}^\bullet(E_i, E_j) = 0$  при  $i > j$ . Исключительный набор  $E_1, E_2, \dots, E_n$  называется *сильным*, если  $\mathrm{Hom}^k(E_i, E_j) = 0$  при  $k \neq 0$  для любых  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Определение 3.** Исключительный набор  $E_1, E_2, \dots, E_n$  называется *полным*, если наименьшая триангулированная подкатегория в  $\mathcal{T}$ , содержащая все  $E_i$ , совпадает со всей категорией  $\mathcal{T}$ .

**Определение 4.** Объект  $G \in \mathcal{T}$  называется (*классическим*) *генератором*, если наименьшая триангулированная подкатегория, содержащая  $G$  и замкнутая относительно взятия прямых слагаемых совпадает с  $\mathcal{T}$ .

Про производные категории торических многообразий известно не слишком много. Имеется общая теорема Ю.Каваматы 2005 года, утверждающая, что на любом полном торическом многообразии с не слишком плохими особенностями имеется полный исключительный набор, однако этот набор строится неявно с помощью торической версии программы минимальных моделей, поэтому на практике его получить очень сложно. Также, не известны общие конструкции для построения исключительных наборов из векторных расслоений (или пучков) по вееру многообразия, что было бы очень интересно.

С другой стороны, имеется много результатов по построению полных (сильных) исключительных наборов из линейных расслоений на разных сериях торических многообразий. Однако, были построены примеры торических многообразий, на которых нет полного исключительного набора из линейных расслоений: самый простой известный пример – это раздутие поверхности Хирцебруха  $\mathbb{F}_2$  в двух точках (L.Hille–M.Perling), позднее А.Ефимов построил примеры таких торических многообразий Фано с числом Пикара 3.

Почти всегда полные сильные исключительные наборы из линейных расслоений на торических многообразиях строятся с помощью *торического морфизма Фробениуса*, о котором и пойдет речь дальше. Конструкция была впервые предложена А.И.Бондалом в 2006 году.

Пусть  $X$  – гладкое торическое многообразие размерности  $d$ ,  $(\mathbb{G}_m)^d \cong \mathbb{T} \subseteq X$  – открытый тор в  $X$ . Для любого  $\ell \in \mathbb{N}$  имеется конечный морфизм  $F_\ell : X \rightarrow X$ , который в ограничении на тор  $(\mathbb{G}_m)^d \cong \mathbb{T}$  имеет вид

$$(\mathbb{G}_m)^d \rightarrow (\mathbb{G}_m)^d, (z_1, z_2, \dots, z_d) \mapsto (z_1^\ell, z_2^\ell, \dots, z_d^\ell).$$

Морфизм  $(F_\ell)_*$  называется *торическим морфизмом Фробениуса*. Рассмотрим прямой образ структурного пучка  $(F_\ell)_*\mathcal{O}_X$ . Можно доказать, что  $(F_\ell)_*\mathcal{O}_X$  расщепляется в прямую сумму линейных расслоений. А.И.Бондал предположил, что  $(F_\ell)_*\mathcal{O}_X$  является генератором производной категории  $\mathbf{D}^b(X)$  при достаточно делимом  $\ell$ , а поэтому из прямых слагаемых  $(F_\ell)_*\mathcal{O}_X$  можно пытаться строить полные сильные исключительные наборы.

До 2023 года утверждение А.И.Бондала о том, что  $(F_\ell)_*\mathcal{O}_X$  является генератором, в общем случае было недоказано. Однако, были работы, где это удавалось сделать в частных случаях, например, Н.Уеһара и N.Prabhu-Naik доказали утверждение А.И.Бондала для трехмерных и четырехмерных торических многообразий Фано, заодно построив на них полные сильные исключительные наборы из линейных расслоений.

Наконец, в 2023 году А.Hanlon, J.Hicks и O.Lazarev доказали следующую сильную теорему.

**Теорема** (Hanlon–Hicks–Lazarev’23) *Пусть  $X$  – гладкое торическое многообразие,  $Y \subset X$  – замкнутое торическое подмногообразие. Тогда существует резольвента для  $\mathcal{O}_Y$ , составленная из прямых слагаемых  $(F_\ell)_*\mathcal{O}_X$ . Причем длина резольвенты равна  $\text{codim}(Y)$ .*

Применяя теорему к диагонали  $\Delta \subset X \times X$ , легко доказать утверждение А.И.Бондала (а также гипотезу Д.О.Орлова про совпадение размерности многообразия с размерностью Рукье  $\mathbf{D}^b(X)$ ).

**Следствие.** *Пусть  $X$  – гладкое торическое многообразие. Тогда  $(F_\ell)_*\mathcal{O}_X$  является генератором производной категории  $\mathbf{D}^b(X)$  при достаточно делимом  $\ell$ . Более того, на  $(F_\ell)_*\mathcal{O}_X$  достигается равенство  $\text{Rdim } \mathbf{D}^b(X) = \dim X$ .*

Интересен следующий вопрос.

**Вопрос.** *Для каких линейных расслоений  $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$  прямой образ  $(F_\ell)_*\mathcal{L}$  является генератором производной категории  $\mathbf{D}^b(X)$  при некотором  $\ell$ ?*

А.Hanlon, J.Hicks и O.Lazarev нашли интересные геометрические препятствия: оказывается, если  $(F_\ell)_*\mathcal{L}$  – генератор, то линейное расслоение  $\mathcal{L}$  должно иметь ненулевые когомологии после ограничения на любое линейно вложенное подмногообразие  $V \hookrightarrow X$ . Изначально А.Hanlon, J.Hicks и O.Lazarev дали комбинаторное определение (в терминах веера) линейно вложенного подмногообразия, но можно его переформулировать в геометрических терминах.

**Предложение.** *Торический замкнутый морфизм  $j : V \hookrightarrow X$  задает линейно вложенное подмногообразие, если и только если, имеется расщепление торов  $T_X = T_V \times T'$  (для некоторого  $T'$ ) и для любого  $t \in T'$  выполняется  $tV \cap V = \emptyset$ .*

Например, всегда есть тривиальные линейно вложенные подмногообразия: единица тора  $e \in T$ , а также весь  $X$ . Была предложена гипотеза, утверждающая, что других препятствий нет.

**Гипотеза** (Hanlon–Hicks–Lazarev) *Прямой образ  $(F_\ell)_*\mathcal{L}$  является генератором  $\mathbf{D}^b(X)$  при некотором  $\ell$  тогда и только тогда, когда  $\mathcal{L}$  неациклично при ограничении на любое линейно вложенное подмногообразие.*

# Ограничение на ранги в полных исключительных наборах

Роман Елисеев

Зафиксируем алгебраически замкнутое поле  $k$  характеристики ноль. Пусть  $\mathcal{T}$  - линейная триангулированная категория над полем  $k$ .

**Определение.** Упорядоченный набор полных триангулированных подкатегорий  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{T}$  называется полуортогональным разложением, если выполнены следующие два условия:

1. для любых индексов  $1 \leq i < j \leq t$  и любых объектов  $A_i \in \mathcal{A}_i, A_j \in \mathcal{A}_j$  имеем  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(A_j, A_i) = 0$ ;
2. минимальная полная триангулированная подкатегория в  $\mathcal{T}$ , содержащая все подкатегории  $\mathcal{A}_i$ , совпадает с  $\mathcal{T}$ .

Полуортогональное разложение с компонентами  $\mathcal{A}_i$  будем обозначать

$$\mathcal{T} = \langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_t \rangle$$

Нас будут интересовать полуортогональные разложения  $D^b(X)$ , ограниченной производной категории когерентных пучков на алгебраическом многообразии  $X$ .

**Определение.** Полная триангулированная подкатегория  $\mathcal{A}$  называется допустимой, если функтор вложения  $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{T}$  имеет левый и правый сопряженные.

Допустимые подкатегории позволяют строить примеры полуортогональных разложений. А именно, если  $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$  - допустимая, имеются полуортогональные разложения

$$\mathcal{T} = \langle \mathcal{A}^\perp, \mathcal{A} \rangle \quad \text{и} \quad \mathcal{T} = \langle \mathcal{A}, {}^\perp \mathcal{A} \rangle,$$

где подкатегории

$$\begin{aligned} {}^\perp \mathcal{A} &= \{T \in \mathcal{T} \mid \text{Hom}(T, A[s]) = 0 \text{ при всех } A \in \mathcal{A}, s \in \mathbb{Z}\}, \\ \mathcal{A}^\perp &= \{T \in \mathcal{T} \mid \text{Hom}(A[s], T) = 0 \text{ при всех } A \in \mathcal{A}, s \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

называются левым и правым ортогоналом к  $\mathcal{A}$  соответственно. Допустимые подкатегории легко построить с помощью исключительных наборов.

**Определение.** Объект  $E \in \mathcal{T}$  называется исключительным, если

$$\text{Hom}(E, E[t]) = \begin{cases} k, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

Например, когерентный пучок  $\mathcal{F}$  на алгебраическом многообразии является исключительным, если  $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = k$  и  $\text{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = 0$  при всех  $i > 0$ . По исключительному объекту  $E \in \mathcal{T}$  можно построить минимальную полную триангулированную подкатегорию  $\langle E \rangle \subset \mathcal{T}$ , его содержащую. Оказывается, что  $\langle E \rangle$  эквивалентна производной категории конечномерных векторных пространств  $D^b(k)$  и является допустимой в  $\mathcal{T}$ . Данная конструкция имеет следующее обобщение.

**Определение.** Последовательность  $E_1, E_2, \dots, E_t$  исключительных объектов называется исключительным набором, если при всех  $1 \leq i < j \leq t$  и всех  $s \in \mathbb{Z}$  выполнено  $\text{Hom}(E_j, E_i[s]) = 0$ . Исключительный набор называется полным, если  $\mathcal{T} = \langle E_1, E_2, \dots, E_t \rangle$ .

Всякая полная триангулированная подкатегория  $\langle E_1, E_2, \dots, E_t \rangle \subset \mathcal{T}$ , порожденная исключительным набором, также является допустимой.

Также обозначим группу Гротендика  $K(\mathcal{T})$  категории  $\mathcal{T}$  вместе с билинейной формой ("Эйлерова форма") определенная формулой  $\langle [F], [G] \rangle := \sum_i (-1)^i \dim_k \text{Hom}_{\mathcal{T}}(F, G[i])$ . Если  $\mathcal{T} = D^b(\text{coh}(X))$  для гладкого проективного многообразия  $X$  размерности  $d$  тогда  $K(X)_{\text{num}} \stackrel{\text{def}}{=} K(\mathcal{T})_{\text{num}}$  конечно-порожденная абелева группа. Более того, действие  $(-1)^d s$  на  $K(\mathcal{T})$  а следовательно на  $K(\mathcal{T})_{\text{num}}$  унитарно [1, Лемма 3.1].

Полный исключительный набор  $(E_i)_i$  в  $\mathcal{T}$  определяет базис  $(e_i)_i$  в  $K(\mathcal{T})$  матрица Грама которого  $M := \langle e_i, e_j \rangle_{ij}$  верхнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали. Понятно, что в этом случае мы имеем, что  $K(\mathcal{T}) = K(\mathcal{T})_{\text{num}}$ . Назовем базис  $(e_i)_i$  в  $K(\mathcal{T})$  с такой матрицей Грама исключительным. В [1, Пример 3.2], показано, что если  $\text{rk } K = 3$  тогда унитарность  $s$  влечет, что коэффициенты матрицы Грама

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

должны удовлетворять уравнению Маркова

$$a^2 + b^2 + c^2 - abc = 0$$

Марковым показано, [2] что все решения данного уравнения могут быть получены некоторой процедурой мутации из набора  $(3, 3, 3)$ . Эта процедура соответствует мутациям исключительного набора. Таким образом получаем  $K \cong K(\mathbb{P}^2)$ . В случае  $\text{rk}(K) = 4$ , можно записать матрицу Грама как:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В этом случае унитарность  $s$  влечет следующие диофантовы уравнения:

$$\begin{cases} acdf - abd - ace - bcf - def + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = 0 \\ af - be + cd = 0 \end{cases}$$

## Список литературы

- [1] A. Bondal and A. Polishchuk, Homological properties of associative algebras: the method of helices, Russian Acad. Sci. Izv. Math. 42 (1994), no. 2, 219–260.
- [2] A. Markov, Sur les formes quadratiques binaires indéfinies, Math. Ann. 15 (1879), no. 3, 281–406.



Александр Зайцев  
Константы Жордана группы Кремены ранга 2

Группой Кремены ранга  $n$  называется группа бирациональных автоморфизмов проективного пространства размерности  $n$ , и обозначается эта группа  $\text{Cr}_n(K)$ . Если случай  $n = 1$  является достаточно простым, а именно, имеется изоморфизм групп

$$\text{Cr}_1(K) \simeq \text{PGL}_2(K),$$

то описание группы Кремены ранга 2 представляет собой сильно более сложную задачу. Так, например, классификация конечных подгрупп в группе  $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$  с точностью до сопряжения заняла у И. В. Долгачева и В. А. Исковских почти 100 страниц. Понятно, что над алгебраически незамкнутыми полями классификация будет еще более громоздкой и едва обозримой, однако какое-то представление о конечных подгруппах иметь все же хочется.

**Определение 1.** Пусть  $G$  — конечная группа. Назовем константой Жордана  $J(G)$  наименьший индекс нормальной абелевой подгруппы в  $G$ . Пусть  $\Gamma$  — произвольная группа. Тогда  $\Gamma$  называется жордановой, если величина

$$J(\Gamma) = \sup_{G \subseteq \Gamma, |G| < \infty} (J(G))$$

конечна. Если группа жорданова, то число  $J(\Gamma)$  называется константой Жордана группы  $\Gamma$ .

В 2010 году Ж.-П. Серр в работе [2, Théorème 3.1] доказал, что группы  $\text{Cr}_2(K)$  являются жордановыми над полями характеристики 0. В 2017 году Е. А. Ясинский посчитал константы Жордана групп Кремены ранга 2 над некоторыми специальными полями.

**Теорема 2** ([3, Theorems 1.9, 1.10, 1.11]). Пусть  $K$  — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Тогда

$$J(\text{Cr}_2(K)) = 7200, \quad J(\text{Cr}_2(\mathbb{R})) = J(\text{Cr}_2(\mathbb{Q})) = 120.$$

В этом году результат Ясинского был обобщен на случай всех полей характеристики 0, а именно, была доказана следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть  $K$  — поле характеристики 0. Константа Жордана группы  $\text{Cr}_2(K)$  может принимать следующие значения: 7200, 168 или 120. Более того,

1.  $J(\text{Cr}_2(K)) = 7200$  тогда и только тогда, когда  $\sqrt{5} \in K$ , и  $-1$  является суммой двух квадратов в  $K$ ;
2.  $J(\text{Cr}_2(K)) = 168$  тогда и только тогда, когда  $\sqrt{5} \notin K$  и  $\sqrt{-7} \in K$ ;
3.  $J(\text{Cr}_2(K)) = 120$  тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:
  - $\sqrt{5} \in K$ , и  $-1$  не является суммой двух квадратов в  $K$ ;
  - $\sqrt{5} \notin K$ , и  $\sqrt{-7} \notin K$ .

Несмотря на то, что общая стратегия получения этого результата была известна специалистам продолжительное время, заключительные шаги удалось сделать относительно недавно. Вопрос вычисления константы Жордана группы Кремоны ранга 2 сводится к вопросу вычисления максимума констант Жордана групп автоморфизмов рациональных поверхностей дель Пеццо и рациональных поверхностей со структурой расслоения на коники над проективной прямой. Самыми сложными оказались случаи поверхностей дель Пеццо степеней 8 и 9. Результаты касающиеся этих поверхностей удобно записать в виде следующего предложения и двух теорем.

**Предложение 4** ([4, Proposition 1.6]). *Пусть  $K$  — поле характеристики 0. Пусть  $S$  — гладкая рациональная квадрика в  $\mathbb{P}_K^3$ , и  $S \not\cong \mathbb{P}_K^1 \times \mathbb{P}_K^1$ . Тогда*

$$J(\text{Aut}(S)) \leq 120.$$

**Теорема 5** ([4, Theorem 1.4]). *Пусть  $K$  — поле характеристики 0.*

1.  $J(\text{Aut}(\mathbb{P}_K^1 \times \mathbb{P}_K^1)) = 7200$  тогда и только тогда, когда  $-1$  является суммой двух квадратов в  $K$ , и  $K$  содержит  $\sqrt{5}$ ;
2.  $J(\text{Aut}(\mathbb{P}_K^1 \times \mathbb{P}_K^1)) = 72$  тогда и только тогда, когда  $-1$  является суммой двух квадратов в  $K$ , и  $K$  не содержит  $\sqrt{5}$ ;
3.  $J(\text{Aut}(\mathbb{P}_K^1 \times \mathbb{P}_K^1)) = 8$  тогда и только тогда, когда  $-1$  не является суммой двух квадратов в  $K$ .

**Теорема 6** ([1, Theorem 1.2]). *Пусть  $K$  — поле характеристики 0. Тогда константа Жордана группы  $\text{PGL}_3(K)$  принимает следующие значения:*

1.  $J(\text{PGL}_3(K)) = 360$  тогда и только тогда, когда  $\omega \in K$  и  $\sqrt{5} \in K$ ;
2.  $J(\text{PGL}_3(K)) = 168$  тогда и только тогда, когда  $\sqrt{-7} \in K$ , и при этом либо  $\omega \notin K$ , либо  $\sqrt{5} \notin K$ ;
3.  $J(\text{PGL}_3(K)) \leq 60$  тогда и только тогда, когда  $\sqrt{-7} \notin K$ , и при этом либо  $\omega \notin K$ , либо  $\sqrt{5} \notin K$ .

С помощью этих трех утверждений, а также аккуратного анализа поверхностей дель Пеццо оставшихся степеней и поверхностей со структурой расслоения на коники над проективной прямой удастся доказать теорему 3 и закрыть вопрос констант Жордана группы бирациональных автоморфизмов проективной плоскости.

## Список литературы

- [1] Yi. Hu. Jordan Constant of  $\text{PGL}_3(K)$ . arXiv:2206.0218 (2022).
- [2] J.-P. Serre. Le groupe de Cremona et ses sous-groupes finis. Séminaire Bourbaki, Nov. 2008, 61<sup>ème</sup> année, **1000** (2010), 75–100.
- [3] E. Yasinsky. The Jordan constant for Cremona group of rank 2, Bulletin of the Korean Mathematical Society, **54** (2017), no. 5, 1859–1871.
- [4] A. Zaitsev. Automorphism groups of two-dimensional quadrics. arXiv:2401.15655 (2024).

# Гипотеза Чилиберто-Ди Дженнаро

Ксения Квитко

НИУ ВШЭ

## Введение

Комплексная гиперповерхность  $X \subset \mathbb{P}^4$  – **нодальная**, если её особенности  $\text{Sing}(X)$  – это обыкновенные двойные точки. Пусть  $d$  – степень гиперповерхности  $X$ .

**Гипотеза Чилиберто-Ди Дженнаро.** Если  $\#\text{Sing}(X) \leq 2(d-1)(d-2)$ , то  $X$  либо факториальна, либо содержит плоскость, либо содержит квадратичную поверхность.

Гипотеза доказана для  $d \leq 4$  в [1], [6] и для  $d \geq 7$  в [5], а также есть результат о факториальности нодальных гиперповерхностей с небольшим числом особенностей:

**Теорема** ([2, 3]). Если  $\#\text{Sing}(X) \leq (d-1)^2$  и  $X$  не содержит плоскость, то  $X$  факториальна.

## Дефект нодальной гиперповерхности

Дефект  $X \subset \mathbb{P}^4$  – это число

$$\delta(X) = h^4(X, \mathbb{Q}) - h^2(X, \mathbb{Q}).$$

**Замечание.**  $X$  факториальна  $\Leftrightarrow \delta(X) = 0$ .

**Теорема** ([4]). Пусть  $J$  – идеал нодов в кольце  $R = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ . Тогда

$$\delta(X) = \#\text{Sing}(X) - h_J(2d-5), \quad (*)$$

где  $h_J(k) = \dim(R/J)_k$  – функция Гильберта идеала  $J$ .

Если  $\delta(X) > 0$ , то  $h_J(2d-5) < p_J(2d-5)$ , где  $p_J$  – многочлен Гильберта.

## Артиновы горенштейновы кольца

Пусть  $H = \{x_4 = 0\}$  – гиперплоское сечение, не проходящее через ноды  $V(J)$ . Тогда имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow (R/J)_{k-1} \xrightarrow{\cdot x_4} (R/J)_k \rightarrow (S/J_H)_k \rightarrow 0,$$

где  $J_H = (J, x_4)$  и  $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ , и верно

$$h_{J_H}(2d-4) > 0.$$

Выберем в  $S_{2d-4}$  подпространство  $W$  коразмерности 1, содержащее  $(J_H)_{2d-4}$ , и положим

$$I_e = \begin{cases} \{f \in S \mid fS_{2d-4-e} \subset W\} & e \leq 2d-4, \\ S_e & e > 2d-4, \end{cases}$$

Тогда функция Гильберта идеала  $I \supseteq J$  симметрична

$$h_I(2d-4-e) = h_I(e),$$

а (локальное) артиново факторкольцо  $R/I$  – **горенштейново**.

**Цоколь**  $\text{Soc}(R/I)$  – аннулятор максимального идеала, является одномерным как векторное пространство. **Цокольная степень** – степень многочлена, порождающего  $\text{Soc}(R/I)$ .

## Подход Клустермана

Доказательство гипотезы для  $d \geq 7$  с помощью формулы (\*) сводится к изучению свойств функций Гильберта артиновых горенштейновых колец  $R/I$  цокольной степени  $e = 2d - 4$  и опирается на следующие леммы:

**Лемма 1** ([5]). Пусть  $d \geq 6$ . Если  $h_I(d - 4) \leq 2d - 7$ , то  $\text{Sing}(X)$  содержит полное пересечение мультистепеней  $(1, 1, d - 1, d - 1)$  либо  $(1, 2, d - 2, d - 1)$ .

**Лемма 2** ([5]). Пусть  $d \geq 7$ . Если  $h_I(d - 4) > 2d - 7$ , то  $\#\text{Sing}(X) \geq 2(d - 2)(d - 1) + 1$ .

Использование результатов об унимодальности  $h$ -вектора, т.е. вектора из ненулевых значений функции Гильберта

$$1 < h_1 < \dots < h_{k-1} < h_k < h_{k+1} \geq \dots \geq h_e,$$

позволяет улучшить оценку Клустермана в Лемме 2 до  $d = 6$ .

## Список литературы

- [1] I. Cheltsov. Nonrational nodal quartic threefolds. *Pacific journal of mathematics*, 226(1):65–81, 2006.
- [2] I. Cheltsov. Factorial threefold hypersurfaces. *arXiv preprint arXiv:0803.3301*, 2008.
- [3] I. A. Cheltsov. On a conjecture of Ciliberto. *Sbornik: Mathematics*, 201(7):1069–1090, 2010.
- [4] A. Dimca. Betti numbers of hypersurfaces and defects of linear systems. *Duke Mathematical Journal*, 60(1):285 – 298, 1990.
- [5] R. Kloosterman. Maximal families of nodal varieties with defect. *Mathematische Zeitschrift*, 300(2):1141–1156, 2022.
- [6] K. A. Shramov.  $\mathbb{Q}$ -factorial quartic threefolds. *Sbornik: Mathematics*, 198(8):1165–1174, 2007.

# Аффинные модели для комплексных алгебраических многообразий

Косолапов Егор

## Мотивировка

**Theorem** (Arapura, 2004). Пусть  $X, Y$  – квазипроективные алгебраические многообразия над  $\mathbb{C}$  и  $f : X \rightarrow Y$  – проективный морфизм. Тогда на спектральной последовательности Лерэ

$$E_2^{p,q} = H^p(Y; R^q f_* \mathbb{Z}) \Rightarrow H^{p+q}(X; \mathbb{Z})$$

имеется смешанная структура Ходжа, согласованная со смешанной структурой на  $X$ .

Возможно ли обобщить результат Арапуры выше на произвольные многообразия?

## План доказательства

- Всё сводится к случаю, когда  $X$  и  $Y$  аффинны с помощью следующего утверждения

**Theorem.** (*Jouanolou's trick*) Пусть  $X$  – квазипроективное многообразие над  $\mathbb{C}$ . Тогда существует такое аффинное многообразие  $Z$  и отображение  $m : Z \rightarrow X$  такое, что  $m$  является аффинным локально тривиальным расслоением.

- Благодаря первому пункту можно свести утверждение теоремы к случаю, когда  $X$  и  $Y$  аффинны. После чего на них строятся фильтрация замкнутыми подмножествами так, чтобы индуцированная спектральная последовательность обладала необходимой совместимой смешанной структурой Ходжа и со второго листа изоморфная спектральной последовательности Лерэ. Здесь никак не используется квазипроективность!

Вывод: Чтобы обобщить теорему Арапуры достаточно научиться находить по заданному многообразию  $X$  подходящее аффинное.

# Аффинные модели

## Определение

Пусть  $X$  – многообразие над  $\mathbb{C}$ . Тогда аффинной моделью  $X$  называется пара  $(Y, m_X)$ , где  $Y$  – аффинное многообразие, а  $m_X : Y \rightarrow X$  – морфизм, удовлетворяющий следующим трем условиям

- $m_X$  – гомотопическая эквивалентность,
- Слои отображения  $m_X$  стягиваемы,
- Для любого ограниченного снизу комплекса пучков  $S_\bullet$  на  $X, m_X$  индуцирует изоморфизм

$$H^i(X; S_\bullet) \cong H^i(Y; m_X^* S_\bullet).$$

## Существование аффинных моделей

Всегда ли существует аффинная модель для произвольного многообразия  $X$ ?

**Theorem.** (Jouanolou's trick) Если  $X$  квазипроективно, то  $X$  допускает аффинную модель  $(Y, m_X)$ . Более того,  $m_X$  является аффинным локально тривиальным расслоением.

**Theorem.** (Thomason's version of Jouanolou's trick) Пусть  $X$  допускает покрытие открытыми подмножествами  $U_i$  такими, что

- Каждое из  $U_i$  изоморфно аффинному многообразию,
- Для каждого  $U_i$  существует линейное расслоение  $\mathcal{L}_i$  над  $X$  и сечение  $s_i \in \Gamma(\mathcal{L}_i)$  такое, что

$$U_i = \{x \in X \mid s_i(x) \neq 0\}.$$

В таком случае  $X$  допускает аффинную модель  $(Y, m_X)$  и  $m_X$  есть аффинное локально тривиальное расслоение.

**Theorem.** Для любого многообразия  $X$  существует аффинная модель  $(Y, m_X)$ . При этом отображение  $m_X$  уже не является аффинным локально тривиальным расслоением.

## Дальнейшие вопросы

- Во всех вышеперечисленных утверждениях аффинная модель строится совершенно не функториальным образом. Возможно ли придумать конструкцию аффинной модели, функториально зависящую от  $X$ ?
- Конструкция аффинной модели работает для многообразий над любым полем и, более общо, для схем над любой нетеровой базовой схемой  $S$ . Обладают ли полученные аффинные схемы аналогами свойств, перечисленных в определении аффинной модели выше?

# Twisted quartic curves on Fano threefolds of type 4-1

Alex Villaro Krüger

## Fano threefolds of type 4-1

**Definition** Let  $V_1, V_2, V_3, V_4$  be 2-dim vector spaces. A smooth divisor

$$X \subset \mathbb{P}(V_1) \quad (1)$$

of multidegree  $(1, 1, 1, 1)$ , is called a Fano threefold of type 4-1.

- $\pi_{jkl} : X \rightarrow \mathbb{P}(V_j) \times \mathbb{P}(V_k) \times \mathbb{P}(V_l)$  is the blowup in a smooth genus-1 curve  $\Gamma_i$ . The exceptional divisor is denoted by  $E_i$ .
- $\pi_{kl} : X \rightarrow \mathbb{P}(V_k) \times \mathbb{P}(V_l)$  is a conic bundle. The discriminant divisor  $\Delta_{kl}$  is a smooth genus-1 curve.
- $\pi_l : X \rightarrow \mathbb{P}(V_l)$  is a sextic del Pezzo fibration. There are 4 singular fibers and the double cover of  $\mathbb{P}(V_l)$  is a smooth genus-1 curve.

All genus-1 curves above are non-canonically isomorphic to the elliptic curve  $\text{Jac}(X)$ .

$\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}^4$  is generated by  $H_1, H_2, H_3, H_4$ .

## Automorphisms of $X$

There exists an embedding

$$G_1 \times G_2 \hookrightarrow \text{Aut}(X) \quad (2)$$

$$G_1 \cong G_2 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \quad (3)$$

which is an isomorphism for general  $X$ .

The group  $G_1$  acts trivially on  $\text{Pic}(X)$ , while  $G_2$  acts faithfully on  $\text{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}^4$ .

The action  $G_1 \curvearrowright X$  is particularly interesting because it appears to act on all families of Fano threefolds of type 4-1. In particular, it appears to act on all  $k$ -forms of  $X$ .

## Derived categories and Hilbert schemes

Let  $Y$  be a projective scheme, and let  $\mathcal{L}$  be an ample line bundle on  $Y$ .

For any  $\mathcal{F} \in \text{Coh}(Y)$ , there exists a unique integer-valued polynomial  $P_{\mathcal{F}}(t) \in \mathbb{Q}[t]$ , called the Hilbert polynomial of  $\mathcal{F}$ . It satisfies

$$P_{\mathcal{F}}(t) = h^0(Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^t), \quad \forall t \gg 0. \quad (4)$$

The Hilbert polynomial of a subscheme  $Z \subset Y$  is defined as  $P_{\mathcal{O}_Z}(t)$ .

For any integer-valued polynomial  $P(t) \in \mathbb{Q}[t]$  there exists a Hilbert scheme  $\text{Hilb}_Y^{P(t)}$ . This scheme parametrizes the closed subschemes of  $Y$  with Hilbert polynomials  $P(t)$ .

The derived category of coherent sheaves  $D^b(Y)$  on a Fano threefold  $Y$ , typically has a semiorthogonal decomposition on the form

$$D^b(Y) = \langle \mathcal{K}_Y, \mathcal{L}_n, \dots, \mathcal{L}_1 \rangle \quad (5)$$

for a collection of line bundles  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$ . Let  $\Phi : D^b(Y) \rightarrow \mathcal{K}_Y$  be adjoint to the embedding functor  $\mathcal{K}_Y \hookrightarrow D^b(Y)$ . Let  $Z \subset Y$  be a closed subscheme with Hilbert polynomial  $P(t)$ . The map

$$\mathcal{O}_Z \mapsto \Phi(\mathcal{O}_Z) \in \mathcal{K}_Y \quad (6)$$

typically induces a morphism

$$\text{Hilb}_Y^{P(t)} \rightarrow \mathcal{M} \quad (7)$$

for some moduli space  $\mathcal{M}$  of objects in  $\mathcal{K}_Y$ . See e.g. [1, Corollary 8.9].

## Twisted quartic curves on $X$

$F_4(X)$  denotes a certain component of the Hilbert scheme  $\text{Hilb}_X^{4t+1}$  of twisted quartic curves on  $X$ .

Applying Orlov's blowup formula to  $\pi_{jkl} : X \rightarrow \mathbb{P}(V_j) \times \mathbb{P}(V_k) \times \mathbb{P}(V_l)$ , we obtain a s.o.d.

$$D^b(X) = \langle D^b(\Gamma_i), D^b(\mathbb{P}(V_j) \times \mathbb{P}(V_k) \times \mathbb{P}(V_l)) \rangle \quad (8)$$

inducing morphisms  $\phi_i : F_4(X) \rightarrow \text{Sym}^2 \Gamma_i$ . The composition

$$\alpha_i : F_4(X) \xrightarrow{\phi_i} \text{Sym}^2 \Gamma_i \rightarrow \text{Pic}^2 \Gamma_i \cong \text{Jac}(X) \quad (9)$$

is the Albanese map of  $F_4(X)$ . Using this, we can embed  $F_4(X)$  in the fiber product

$$\begin{aligned} & \text{Sym}^2 \Gamma_1 \times_{\text{Jac}(X)} \text{Sym}^2 \Gamma_2 \\ & \times_{\text{Jac}(X)} \text{Sym}^2 \Gamma_3 \times_{\text{Jac}(X)} \text{Sym}^2 \Gamma_4 \end{aligned} \quad (10)$$

which is a  $(\mathbb{P}^1)^4$ -bundle over  $\text{Jac}(X)$ .

The main result can be deduced from this.

**Theorem** There is an isomorphism

$$F_4(X) \cong (X \times \text{Jac}(X)) / \text{Jac}(X)[2] \quad (11)$$

where  $\text{Jac}(X)[2] \cong (Z/2Z)^2$  is the 2-torsion subgroup of  $\text{Jac}(X)$

$\text{Jac}(X)[2]$  acts on  $\text{Jac}(X)$  by translation, and on  $X$  by  $\text{Jac}(X)[2] \cong G_1 \curvearrowright X$ .

In particular, the Albanese map  $F_4(X) \rightarrow \text{Jac}(X)$  is a non-trivial but isotrivial family with all fibers isomorphic to  $X$ .

## Further questions

There's a **symmetric** semiorthogonal decomposition

$$D^b(X) = \langle \mathcal{K}_X, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0 \rangle \quad (12)$$

The collection  $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0 \rangle$  is Lefschetz but not rectangular.

It appears that  $\mathcal{K}_X \cong D^b(\mathcal{G}_X)$  where  $\mathcal{G}_X$  is a genus-one curve with 3 stacky points.

## Moduli space

Let  $\mathcal{M}_{4-1}$  denote the moduli space of Fano threefolds of type 4.1.

Let  $\mathcal{M}_{1,3}$  denote the moduli space of genus-1 curves with 3 marked points.

**Lemma** There's a natural action of  $S_4$  on  $\mathcal{M}_{1,3}$ .

**Hypothesis** The map  $X \mapsto \mathcal{K}_X$  induces a representable morphism

$$\mathcal{M}_{4-1} \rightarrow \mathcal{M}_{1,3}/S_4 \quad (13)$$

which is a  $(Z/2Z)^2$ -rigidification.

## Rationality

Over non-closed fields  $k$ , there exist forms  $X_k$  of  $X$  with Picard rank 1.

**Question** Can such forms  $X_k$  be rational? [2, Conjecture 1.3]

## References

- [1] A. Kuznetsov and Y. Prokhorov "Rationality of Fano threefolds over non-closed fields", American Journal of Mathematics, (2023).
- [2] A. Kuznetsov and Y. Prokhorov "Rationality over nonclosed fields of Fano threefolds with higher geometric Picard rank", J. Inst. Math. Jussieu, (2022).



# Соответствие Дольда-Кана

Даня Кузаков

Июль 2024

## Аксиоматика С. Berger'а [4]

**Определение 1.** Категория  $\mathcal{C}$  вместе с системой факторизации  $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$  и функтором  $(-)^* : \mathcal{E}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{M}$  называется Дольд-Кан категорией  $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, (-)^*)$ , если она удовлетворяет следующим аксиомам

- (DK1)  $ee^* = 1$ , а идемпотенты  $e^*e$  формируют множество  $\mathcal{E}$ -проекторов  $\text{Proj}_{\mathcal{E}}()$ ;
- (DK2) морфизмы  $f^*e$  (для  $e, f \in \mathcal{E}$ ) образуют подкатегорию в  $\mathcal{C}$ ;
- (DK3) несущественные морфизмы  $\mathcal{M}_{\text{in}}$  (см. опр. ниже) формируют идеал в  $\mathcal{M}$ ;
- (DK4) для любого  $A \in \mathcal{C}$  множество  $\text{Proj}_{\mathcal{E}}(A)$  конечно. Причём примитивные  $\mathcal{E}$ -проекторы (см. опр. ниже) можно частично упорядочить таким образом, что  $p_i \circ p_j$  снова проектор, а  $p_j \circ p_i$  не  $\mathcal{E}$ -проектор при  $i < j$ . Более того, для примитивных проекторов верно

$$p_i \cdot p_j = p_j \cdot p_i \cdot p_j = p_i \cdot p_j \cdot p_i, \quad i < j.$$

**Определение 2.** Проектор  $p$  называется примитивным, если

$$p = p_1 \circ p_2 \implies p_1 = \text{id} \text{ или } p_2 = \text{id}.$$

**Определение 3.** Отображение  $t : A \rightarrow B \in \mathcal{M}$  называется существенным, если

$$p \circ t = t, \quad p \in \text{Proj}_{\mathcal{E}}(B) \implies p = \text{id}_B. \quad (1)$$

Иначе мономорфизм называется несущественным.

Обозначим фактор-категорию  $\Xi_{\mathcal{C}} = \mathcal{M}/\mathcal{M}_{\text{in}}$ . Тогда имеет место следующая сопряженная эквивалентность функторов для любой абелевой категории  $\mathcal{A}$

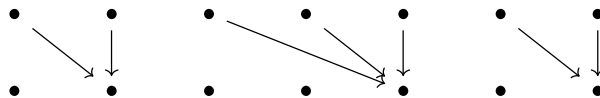
$$R_{\mathcal{C}} : [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{A}] \xrightleftharpoons[\text{Lan}_j]{j^*} [\mathcal{M}^{\text{op}}, \mathcal{A}] \xrightleftharpoons[q^*]{\text{Ran}_q} [\Xi_{\mathcal{C}}^{\text{op}}, \mathcal{A}]_* : L_{\mathcal{C}}, \quad (2)$$

где  $j : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{C}$  вложение,  $q : \mathcal{M} \rightarrow \Xi_{\mathcal{C}} = \mathcal{M}/\mathcal{M}_{\text{in}}$  факторизация.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^{\text{op}} & \xrightarrow{j} & \mathcal{C}^{\text{op}} & \xrightarrow{G} & \mathcal{A} & & \mathcal{M}^{\text{op}} & \xrightarrow{q} & \Xi_{\mathcal{C}}^{\text{op}} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{A} \\ & \searrow q & & \swarrow \text{Ran}_q(G \circ j) & & & & \searrow j & & \swarrow \text{Lan}_j(\mathcal{F} \circ q) & \\ & & \Xi_{\mathcal{C}}^{\text{op}} & & & & & & \mathcal{C}^{\text{op}} & & \end{array} \quad (3)$$

## Категория $\Delta$

$\mathcal{E}$  — сюръекции,  $\mathcal{M}$  — инъекции;  $e : [m] \rightarrow [n]$  сопоставляем максимальную секцию  $e^* : [n] \hookrightarrow [m]$  (т. е. каждому элементу  $j \in [n]$  сопоставляем максимальный прообраз  $e^{-1}(j) \in [m]$ ). Проектор  $p_e = e^*e : [m] \rightarrow [m]$  выглядит следующим образом (каждой группе сопоставляет максимальный прообраз).



Оператору вырождения это определение сопоставляет  $(s^i)^* = d^i$ . Соответствующие примитивные проекторы  $p^i := d^i \circ s^i$ . Можно заметить, что

$$p^i d^i = d^i s^i d^i = d^i,$$

поэтому все отображения граней, кроме старшей  $d^n$ , лежат в подкатегории  $\mathcal{M}_{\text{in}}$ .

В категории  $\Xi_{\Delta} = \mathcal{M}/\mathcal{M}_{\text{in}}$  склеиваются (попадают в выделенный) все морфизмы, кроме старшей грани. Схематично это можно изобразить так

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & * & & * & & * \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 [0] & \xrightarrow{i} & [1] & \xrightarrow{i} & [2] & \xrightarrow{i} & [3] & \xrightarrow{i} & \dots \\
 & \xleftarrow{*} & & \xleftarrow{*} & & \xleftarrow{*} & & \xleftarrow{*} & 
 \end{array} \\
 \end{array} \tag{4}$$

где верхние стрелки символизируют, что композиция любых двух морфизмов равна выделенному. Конечно же, категория предпучков  $[\Xi_{\Delta}^{\text{op}}, \mathbf{Ab}]_*$  эквивалентна категории цепных комплексов  $\mathbf{Ch}_+(\mathbf{Ab})$ . Таким образом, получается в точности утверждение теоремы Дольда-Кана [1], [2]

$$\mathbf{Ch}_+(\mathbf{Ab}) \simeq [\Delta^{\text{op}}, \mathbf{Ab}]. \tag{5}$$

## Категория $\Gamma$

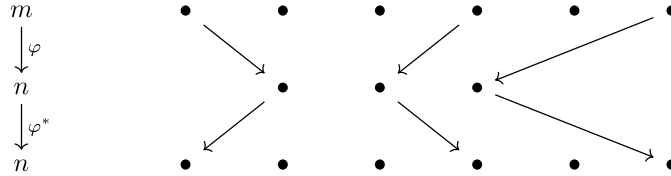
**Определение 4.** Категория  $\Gamma$  состоит из неупорядоченных множеств  $t = \{1, 2, \dots, t\}$ . Морфизмы между ними  $\varphi : t \rightarrow n$  — это отображения  $\Phi : t \rightarrow \mathcal{P}(n)$  с условием  $\Phi(i) \neq \Phi(j)$  для  $i \neq j$ .

В категории  $\Gamma$  имеется система факторизации

$$\varphi \in \mathcal{E} \iff \begin{cases} \cup \Phi(i) = n \\ \Phi(i) = \text{либо одноэлементное множество, либо } \emptyset \end{cases} \tag{6}$$

$$\varphi \in \mathcal{M} \iff \Phi(i) \neq \emptyset \text{ для любого } i.$$

Определим  $(-)^* : \mathcal{E}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $\varphi : t \rightarrow n \rightsquigarrow \varphi^* : n \rightarrow t$



То есть сопоставляем элементу его единственный прообраз;  $\varphi^* \circ \varphi = p_{\varphi}$  является проектором. В данных терминах естественно возникает сопряженная эквивалентность  $[\Xi_{\Gamma}^{\text{op}}, \mathcal{A}]_* \simeq [\Gamma^{\text{op}}, \mathcal{A}]$ , показанная в работе [3].

## Категория $\Theta_2$

**Определение 5.** Категория  $\Theta_2 = \Delta \wr \Delta$  состоит из объектов  $a = \{[n]; [m_1], \dots, [m_n]\}$ ,  $[n], [m_i] \in \Delta$ . Морфизмы между ними  $\Theta_2(a, b) = \{\varphi : [n] \rightarrow [n'] \in \Delta; \varphi_i^j : [m_i] \rightarrow [m'_j] \in \Delta, j = \varphi(i-1) + 1, \dots, \varphi(i)\}$ .

$$\varphi \in \mathcal{E}_{\Theta_2} \iff \begin{cases} \varphi : [n] \rightarrow [n'] \in \mathcal{E}_{\Delta}, \text{ т. е. сюръекция в } \Delta, \\ \text{каждое } \varphi_i^j \text{ — сюръекция в } \Delta. \end{cases} \tag{7}$$

$$\varphi \in \mathcal{M}_{\Theta_2} \iff \text{каждое } \varphi_i^j : [m_i] \rightarrow [m'_j], j = \varphi(i-1) + 1, \dots, \varphi(i) \text{ — разделяющее семейство.}$$

**Определение 6.** Отображения  $\varphi_i : [n] \rightarrow [n_i]$ ,  $i = 0, \dots, k$  называются разделяющим семейством, если для любых неравных  $a, b \in [n]$  найдётся такое  $0 \leq l \leq k$  и отображение  $\varphi_l : [n] \rightarrow [n_l]$ , что  $\varphi_l(a) \neq \varphi_l(b)$ .

## Замыкание по Каруби

Несколько другой взгляд (предложенный С. Rezk'ом) на соответствие Дольда-Кана предлагает посмотреть на Карубиево замыкание  $\mathcal{C}$  образа вложения Йонеды  $y : \mathbb{Z}\Delta \hookrightarrow [\mathbb{Z}\Delta^{\text{op}}, \mathbf{Ab}]$ . Оказывается,  $\mathcal{C}$  будет эквивалентно  $\mathbf{Ch}_+(\mathbf{Ab})$ .

**Определение 7.** Для категории  $\mathcal{C}$  полная подкатегория  $\tilde{\mathcal{C}} \hookrightarrow [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$  является замыканием по Каруби, если (а) любой объект  $\tilde{C}$  является ретрактом объекта  $\mathcal{C}$  и (б) любой идемпотент из  $\mathcal{C}$  расщепляется в  $\tilde{\mathcal{C}}$ .

## Список литературы

- [1] A. Dold, *Homology of symmetric products and other functors of complexes*, Ann. of Math. (2) 68, 1958.
- [2] D. Kan, *Functors involving c.s.s. complexes*, Trans. Amer. Math. Soc. 87, 1958.
- [3] T. Pirashvili, *Dold-Kan type theorem for  $\Gamma$ -groups*, Math. Ann. 318 (2000), no. 2, 277–298.
- [4] C. Berger, *Dold-Kan categories and Catalan monoids*, Talk at CATS60, Toulouse, 2022.

# Вычисление степени отображений из сферы в сферу, заданных явной формулой

Кучер Д. А.

Как известно, фундаментальная группа плоскости с выколотой точкой изоморфна группе целых чисел по сложению. Пусть задана замкнутая кривая

$$g : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0$$

Тогда образ ее гомотопического класса при изоморфизме с группой целых чисел будем называть индексом кривой относительно нуля. В случае дифференцируемых кривых для индекса известна формула из комплексного анализа:

$$\text{ind}_0(g) = \frac{1}{2\pi i} \int_g \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{dg(t)}{g(t)}$$

Как известно, гомотопическая группа  $\pi_2(S^2)$  тоже изоморфна группе целых чисел. Степенью отображения

$$R : S^2 \rightarrow S^2$$

будем называть образ гомотопического класса этого отображения при изоморфизме, причем степень тождественного отображения будем считать равной 1. Далее мы всегда будем отождествлять  $S^2$  с комплексной плоскостью, к которой добавили бесконечность:

$$S^2 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

с соответствующей введенной топологией на  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

В своей работе я показал, что в достаточно общем случае вычисление степени отображения из сферы в сферу можно свести к задаче о вычислении степени отображения из окружности в окружность.

Мы будем рассматривать непрерывные функции  $R$  из сферы в сферу, заданные как отношение двух непрерывных комплекснозначных функций  $f$  и  $g$ , определенных на комплексной плоскости, таких, что:

1)  $R = \frac{f(z)}{g(z)}$  имеет предел (конечный или бесконечный) при  $|z| \rightarrow \infty$ .

2) Нет таких точек  $z$ , что  $f(z) = g(z) = 0$ .

Тогда если  $g(z) = 0$ , полагаем значение функции  $R$  в точке  $z$  равным  $\infty$ . Легко проверить, что если функции  $f$  и  $g$  непрерывны на  $\mathbb{C}$  и удовлетворяют условиям 1 и 2, то отношение  $\frac{f}{g}$  — непрерывная функция из  $S^2$  в  $S^2$ .

В своей работе я доказал следующую теорему:

**Теорема 1** Пусть  $R(z) = \frac{f(z)}{g(z)} : S^2 \rightarrow S^2$ , где  $f$  и  $g$  непрерывны на всей плоскости. Предположим, нет таких точек  $z$ , что  $f(z) = g(z) = 0$ .

Тогда:

Если:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} R(z) = \infty$$

и  $M > 0$  — такое число, что при  $|z| \geq M$  функция  $f$  не имеет нулей, то

$$\deg(R) = \text{ind}_0(\tilde{f})$$

где  $\text{ind}_0(\tilde{f})$  — индекс кривой  $\tilde{f}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : [0; 2\pi] &\rightarrow \mathbb{C} \setminus 0 \\ \phi &\mapsto f(Me^{i\phi}) \end{aligned}$$

относительно нуля.

Теорема 1 является обобщением известного факта о том, что степень функции, заданной как отношение двух взаимнопростых комплексных многочленов

$$R(z) = \frac{p(z)}{g(z)} : S^2 \rightarrow S^2$$

является максимум из степеней числителя и знаменателя.

### Примеры к Теореме 1

1) Пусть

$$R(z) = \frac{\bar{z}^3 z + 2z^4 + \bar{z}^2 z + 5}{\bar{z}^2 + z}$$

Пусть  $f$  это числитель функции  $R$ . Рассмотрим старшую однородную компоненту для  $f : T = \bar{z}^3 z + 2z^4$ . При  $|z| \geq 2$  у числителя нет нулей и  $|T(z)| > |f(z) - T(z)|$ . Вычислим индекс кривой  $g(t) = T(2e^{it})$ . Пусть  $z = ke^{it}$ , где  $k = |z|$ . Тогда:

$$T(ke^{it}) = k^4(e^{-2it} + 2e^{4it}) = 2k^4 e^{-2it} \left( e^{6it} + \frac{1}{2} \right)$$

Многочлен  $z^6 + \frac{1}{2}$  имеет 6 комплексных корней, меньших 1 по модулю. Значит, множитель  $e^{6it} + \frac{1}{2}$  можно разложить в произведение 6 множителей вида  $e^{it} - c_j$ , где  $|c_j| < 1$ :

$$e^{6it} + \frac{1}{2} = \prod_{j=1}^{j=6} (e^{it} - c_j)$$

Понятно, что индекс кривой

$$t \mapsto e^{it} - c_j$$

равен 1. Индекс произведения таких кривых равен сумме индексов, т.к. эти кривые можно покомпонентно прогомотопировать в кривую  $t \mapsto e^{it}$ . Отсюда степень  $R$  равна  $-2 + 6 = 4$ .

2) Пусть

$$R(z) = z^4 + \bar{z}^2 + 2z.$$

В данном случае старшая однородная компонента не имеет предела на бесконечности. Тем не менее  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} R(z) = \infty$ . Легко проверить, что  $R(z) \neq 0$  при  $|z| \geq 3$ . Тогда степень  $R$  равна индексу кривой

$$g(t) = R(3e^{it})$$

По формуле индекса кривой из комплексного анализа:

$$\text{ind}_0(g) = \frac{1}{2\pi i} \int_g \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(324ie^{4it} - 18ie^{-2it} + 6ie^{it})dt}{81e^{4it} + 9e^{-2it} + 6e^{it}} = 8$$

# Обобщенная полухарактеристика, ее квадратичность.

Лаврухин Виктор

Август 2024

**Определение 1.** Пусть  $B$  — топологическое пространство,  $f: B \rightarrow BO_n$  — непрерывное отображение.  $(B, f)$ -многообразие размерности  $n$  — это пара  $(X, g_X)$ , где  $X$  — компактное подмногообразие размерности

$n$  в  $\mathbb{R}^q$ ,  $g_X: X \rightarrow B$  — непрерывное отображение, замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & \nearrow^{g_X} & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{\tau_X} & BO_n \end{array}$$

(две  $(B, f)$ -структуры  $g_X$  и  $\tilde{g}_X$  на  $X$  эквивалентны если они гомотопны в классе поднятий  $\tau_X$ ).

## 0.1 Обобщенной полухарактеристика

Пусть  $\mathcal{R}_{n+1} := \bigcap_{M \in \text{Man}_n} \text{Ker}(\tau_M^*) \subseteq H^{n+1}(BO_{n+1})$  — подгруппа соотношений на числа Штифеля–Уитни замкнутых многообразий.

Для  $R \in \mathcal{R}_{n+1}$  рассмотрим пару  $(B, f)$  такую, что  $f^*(i^*(R)) = 0$ .

Пусть  $(X, g_X)$  —  $(B, f)$ -многообразие,  $Y$  — многообразие с краем такое, что  $X = \partial Y$

$$\begin{array}{ccccc} B & & & & \\ \downarrow f & \swarrow^{g_X} & & & \\ & X & \longleftrightarrow & Y & \\ & \swarrow^{\tau_X} & & \searrow^{\tau_Y} & \\ BO_n & \xrightarrow{i} & & & BO_{n+1}. \end{array}$$

Имеет место диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} H^n(B) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(B \xrightarrow{i \circ f} BO_{n+1}) & \xrightarrow{|_{BO_{n+1}}} & H^{n+1}(BO_{n+1}) & \xrightarrow{(i \circ f)^*} & H^{n+1}(B) \\ g_X^* \downarrow & & (\tau_Y, g_X)_c^* \downarrow & & \downarrow \tau_Y^* & & \downarrow g_X^* \\ H^n(X) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(X \xrightarrow{i} Y) & \xrightarrow{|_Y} & H^{n+1}(Y) & \longrightarrow & H^{n+1}(X). \end{array}$$

Так как  $(i \circ f)^*(R) = 0$ , найдется  $r \in H^{n+1}(B \xrightarrow{i \circ f} G_{n+1}^{q+1})$  такой, что  $r|_{G_{n+1}^{q+1}} = R$ .

**Определение 2.**  $\varkappa_r^Y(X, g_X) := \langle (\tau_Y, g_X)_c^*(r), [Y]_c \rangle$  — обобщенная полухарактеристика  $(B, f)$ -подмногообразия  $(X, g_X)$ .

**Замечание 3.** обобщенной полухарактеристика  $\varkappa_r$  не зависит от выбора нуля-кобордизма (далее будем писать  $\varkappa_r$ ).

**Утверждение 4.** Существует инвариант  $\lambda$  со значениями в  $\mathbb{Z}/4$  такой, что

1.  $\lambda$  аддитивен
2.  $\iota \varkappa_r(X, g_X) = \lambda(X, g_X)$  для нуля-кобордантного  $(X, g_X)$  ( $\iota: \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z}/4$  — мономорфизм).

**Замечание 5.**  $(\lambda - \lambda')(M, g_M)$  — аддитивный инвариант неориентированного кобордизма, то есть линейная комбинация чисел Штифеля–Уитни.

## 0.2 Кобордизмы со структурой и связь с эйлеровой характеристикой

**Определение 6.**  $(B, f)$ -многообразия  $(X, g_X)$  и  $(X', g_{X'})$  называются  $(B_1, f_1)$ -кобордантными если существует  $(B_1, f_1)$ -многообразие  $(Y, g_Y)$  такое, что  $X \sqcup X'$  и диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{j} & B_1 \\
 \downarrow f & \swarrow (g_X, g_{X'}) & \nearrow g_Y \\
 & X \sqcup X' \longrightarrow & Y \\
 & \swarrow (\tau_X, \tau_{X'}) & \searrow \tau_Y \\
 BO_n & \xleftarrow{i} & BO_{n+1}
 \end{array}$$

**Теорема 7.** 1) Если  $f_1^*(R) = 0 \in H^{n+1}(B_1)$ , то можно выбрать  $\tau$  так, что  $\lambda$  будет инвариантом  $(B_1, f_1)$ -кобордизма.

2) Если  $f_1^*(R + w_{n+1}) = 0 \in H^{n+1}(B_1)$ , то можно выбрать  $\tau$  так, что для  $(B, f)$ -многообразий  $(X, g_X)$  и  $(X', g_{X'})$  и  $(B_1, f_1)$ -кобордизма  $(Y, g_Y)$  между ними

$$\lambda[X, g_X] - \lambda[X', g_{X'}] = 2(\chi(Y) - \chi(X)) \pmod{4}.$$

3) Если квадрат

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{j} & B_1 \\
 f \downarrow & & \downarrow f_1 \\
 G_n^q & \xrightarrow{i} & G_{n+1}^{q+1}
 \end{array}$$

гомотопически декартов и  $f^*(i^*(R)) = 0 \in H^{n+1}(B)$ , то  $f_1^*(R) = 0$

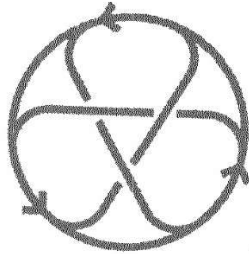
или  $f_1^*(R + w_{n+1}) = 0$ .

## 0.3 Квадратичное свойство обобщенной полухарактеристики

**Определение 8.** Рассмотрим множество троек  $(X, g_X, x)$ , где  $(X, g_X)$  —  $(B, f)$ -подмногообразие (не обязательно компактное) размерности  $n$  в  $\mathbb{R}^q$  без края,  $x \in X$ . Пары  $(X_0, g_{X_0}, x_0)$  и  $(X_1, g_{X_1}, x_1)$  будем называть эквивалентными, если  $x_0 = x_1$  и существует открытая окрестность  $x_0 \in O \subseteq \mathbb{R}^q$  такая, что  $X_0 \cap O = X_1 \cap O$  и  $g_{X_0}|_{X_0 \cap O} = g_{X_1}|_{X_1 \cap O}$ . Класс этой эквивалентности будем называть ростком  $(B, f)$ -подмногообразия в точке  $x_0$ .

- $E_f$  — множество ростков  $(B, f)$ -подмногообразий в  $\mathbb{R}^q$
- $I(X, g_X) \in (\mathbb{Z}/2)^{E_f}$  — характеристическая функция множества ростков  $(B, f)$ -подмногообразия  $(X, g_X)$ .

**Теорема 9.** Существует такое квадратичное отображение  $\mathfrak{L} : (\mathbb{Z}/2)^{E_f} \rightarrow \mathbb{Z}/4$ , что  $\lambda(X, g_X) = \mathfrak{L}(I(X, g_X))$  для любого  $(B, f)$ -подмногообразия  $(X, g_X)$ .



# Симплектические емкости и выпуклые множества

ЛЕОНТЬЕВ К.В.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Работы Громова в симплектической геометрии привели к развитию новых симплектических инвариантов, отличных от объема, называемые **симплектическими емкостями**. Эти инварианты являются ключевыми инструментами в доказательстве вопросов симплектических вложений. Недавно построенные емкости оказались совпадающими на выпуклых множествах и равными минимуму действия замкнутых характеристик по краю. Это позволило связать их с **гипотезой Малера** и бильярдами Минковского.

## 2. СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ

Рассмотрим  $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}_q^n \times \mathbb{R}_p^n$  со стандартной симплектической структурой  $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$ .

**Определение 1.** Симплектической емкостью на  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$  называется отображение  $c : 2^{\mathbb{R}^{2n}} \rightarrow [0, \infty]$ , удовлетворяющее свойствам:

- (1)  $c(U) \leq c(V)$ , если  $U \subseteq V$  (монотонность)
- (2)  $c(\psi(U)) = |\alpha| c(U)$  для  $\psi \in \text{Diff}(\mathbb{R}^{2n})$  и  $\psi^*\omega = \alpha\omega$  (конформность)
- (3)  $c(B^{2n}(r)) = c(B^2(r) \times \mathbb{C}^{n-1}) = \pi r^2$  (нетривиальность и нормировка)

Априори не ясно, что емкости существуют, но примерами такой конструкции являются:

- $\underline{c}(U) = \sup\{\pi r^2 \mid \exists B^{2n}(r) \xrightarrow{s} U\}$  (ширина Громова)
- $\bar{c}(U) = \inf\{\pi r^2 \mid \exists U \xrightarrow{s} Z^{2n}(r)\}$  (цилиндрическая емкость)

где  $\xrightarrow{s}$  означает вложение, сохраняющее  $\omega$ .

В последствии были определены емкости Хофера-Зендера [5] ( $c_{HZ}$ ) и Экланда-Хофера [3] ( $c_{EH}$ ), которые, как оказалось, совпадают на семействе выпуклых подмножеств с гладким краем, а именно:

Назовем  $K(\mathbb{R}^k)$  - множество выпуклых тел с непустой внутренностью, лежащие в  $\mathbb{R}^k$ . Пусть  $K \in K(\mathbb{R}^{2n})$  имеет гладкий край. Тогда  $\omega$  определяет одномерное подрасслоение касательного расслоения края  $\mathfrak{M}_K = \{(x, \xi) \in T\partial K \mid i_\xi \omega|_{\partial K} = 0\}$

**Определение 2.** Замкнутой характеристикой называется вложение  $\gamma : S^1 \rightarrow \partial K$ , для которого  $\dot{\gamma} \in \mathfrak{M}_K$

Действием вдоль кривой  $\gamma$  называется  $A(\gamma) = \int_\gamma pdq$ . Результаты [4] и [5] влекут за собой следующую теорему

**Теорема 3.** Пусть  $K \in K(\mathbb{R}^{2n})$  имеет гладкий край, тогда существует замкнутая характеристика  $\gamma^*$  на  $\partial K$ , такая, что:

$$c_{EH}(K) = c_{HZ}(K) = A(\gamma^*) = \min\{A(\gamma) \mid \gamma - \text{замкнутая характеристика на } \partial K\}$$

Эти наблюдения позволяют изучать и считать емкости в выпуклых телах. Дополнительно, в множествах вида  $K \times T$ , где  $K, T \in K(\mathbb{R}^n)$ , проекции замкнутых характеристик на  $K$  являются бильярдными траекториями с нормой  $h_T(x) = \sup\{(x, y) \mid y \in T\}$ .

### 3. ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО

Примеры емкостей, такие как ширина Громова, естественным образом обладают свойством, что шар достигает максимального значения среди множеств фиксированного объема. Отсюда возник общий вопрос:

**Гипотеза 4.** (*изопериметрическое неравенство*) Пусть  $c$  - симплектическая емкость,  $K \in K(\mathbb{R}^{2n})$ , тогда

$$\frac{c(K)}{c(B)} \leq \left( \frac{\text{Vol}(K)}{\text{Vol}(B)} \right)^{1/n}, \text{ где } B = B^{2n}(1)$$

Оно означает, что в пространстве выпуклых множеств фиксированного объема, шар имеет максимальную емкость. Пока данная гипотеза не была доказана или опровергнута, но были сделаны серьезные шаги в этом направлении [2]

**Теорема 5.** Пусть  $c$  - симплектическая емкость,  $K \in K(\mathbb{R}^{2n})$ , тогда  $\exists A_0$ , т.ч.

$$\frac{c(K)}{c(B)} \leq A_0 \left( \frac{\text{Vol}(K)}{\text{Vol}(B)} \right)^{1/n}, \text{ где } B = B^{2n}(1)$$

### 4. ГИПОТЕЗА МАЛЕРА

Определим полярное множество тела  $K \in K(\mathbb{R}_q^n)$ :  $K^\circ = \{p \in \mathbb{R}_p^n \mid (p, q) \leq 1\}$ , по сути это единичный шар в двойственном пространстве с операторной нормой. Пусть  $K_s(\mathbb{R}^k) \subseteq K(\mathbb{R}^k)$  - все центрально симметричные выпуклые тела.

**Гипотеза 6.** (*Малера*): Для любого  $K \in K_s(\mathbb{R}_q^n)$  выполняется  $\text{Vol}(K \times K^\circ) \geq \frac{4^n}{n!}$

Имея оценки на  $c(K \times K^\circ)$ , можно заметить, что из изопериметрического неравенства будет следовать эта гипотеза. В [1] было получено, используя связь с бильярдными траекториями

**Теорема 7.** Для любого  $K \in K_s(\mathbb{R}_q^n)$  выполняется  $c_{HZ}(K \times K^\circ) = 4$

этой теоремы достаточно, чтобы из гипотезы 4 для  $c_{HZ}$  следовала гипотеза Малера.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Shiri Artstein-Avidan, Roman Karasev, and Yaron Ostrover. From symplectic measurements to the Mahler conjecture. *Duke mathematical journal*, 163(11), 8 2014.
- [2] Shiri Artstein-Avidan, V. D. Milman, and Y Ostrover. The "mellipsoid, symplectic capacities and volume. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 83:359–369, 2006.
- [3] Helmut Hofer and Ivar Ekeland. Symplectic topology and hamiltonian dynamics ii. *Mathematische Zeitschrift*, 203(4):553–568, 1990.
- [4] Helmut Hofer and Ivar Ekeland. Symplectic topology and hamiltonian dynamics ii. *Mathematische Zeitschrift*, 203(4):355–378, 1990.
- [5] Helmut Hofer and Eduard Zehnder. *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*. 1 1994.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ



# Coherent sheaves on maximally singular curves

Alexey Lvov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>SPbU, Saint-Petersburg, Russia

## CATEGORY OF SINGULAR MODELS OF A CURVE

Let  $X$  be an algebraic curve over a field  $k$ . We will call a curve  $Y$  a **singular model** of  $X$  if there is a finite birational morphism of algebraic curves  $\varphi : X \rightarrow Y$ , which is bijective on underlying topological spaces.

**Definition.**  $C_X$  is the category of all singular models of  $X$  with morphisms given by commutative triangles.

**Proposition.** (cf. Figure 1) Category  $C_X$  is partially ordered set and have coproducts.

Therefore  $C_X$  is a directed set.

## CATEGORY $\text{Coh}(C_X)$

Let  $f : Y_1 \rightarrow Y_2$  be a finite birational morphism of algebraic curves.

**Proposition.**  $f_* : \text{Coh}(Y_1) \rightarrow \text{Coh}(Y_2)$  is fully faithful on torsion free sheaves.

**Definition.** Category  $\text{Coh}(C_X)$  is 2-limit of diagram  $\text{Coh} : C_X \rightarrow \text{Cat}$ .

The objects of  $\text{Coh}(C_X)$  are Coherent sheaves on singular models of  $X$  and for  $F_1, F_2 \in \text{Coh}(C_X)$  which are sheaves on  $Y_1$  and  $Y_2$ :

$$\text{Hom}_{\text{Coh}(C_X)}(F_1, F_2) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ \{Y > Y_1, Y_2\} \subset C_X}} \text{Hom}_Y(F_1, F_2)$$

**Proposition.** For torsion free  $F_1, F_2 \in \text{Coh}(C_X)$  we have

$$\text{Hom}_{\text{Coh}(C_X)}(F_1, F_2) = \text{Hom}_{Y_1 \amalg Y_2}(F_1, F_2)$$

## TORSION PAIR IN $\text{Coh}(C_X)$

Denote by  $\mathcal{T}(C_X), \mathcal{F}(C_X)$  subcategories of  $\text{Coh}(C_X)$  of torsion and torsion free sheaves respectively.

**Theorem.**

- $\text{Coh}(C_X)$  is abelian,
- $(\mathcal{T}(C_X), \mathcal{F}(C_X))$  is a torsion pair in  $\text{Coh}(C_X)$ ,
- $\mathcal{T}(C_X) \simeq \bigoplus_{x \in X} \text{Vect}_k$
- $\mathcal{O}_x$  are injective in  $\text{Coh}(C_X)$
- $\forall \mathcal{G} \in \text{Coh}(C_X)$  there are  $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(C_X), \mathcal{T} \in \mathcal{T}(C_X)$  such that  $\mathcal{G} \simeq \mathcal{T} \oplus \mathcal{F}$ .

## HOMOLOGICAL PROPERTIES OF $\text{Coh}(C_X)$

**Proposition.** For every pair of objects  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Coh}(C_X)$  we have

$$\text{Ext}_{\text{Coh}(C_X)}^n(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ \{Y \in C_X | \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Coh}(Y)\}}} \text{Ext}_Y^n(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

Therefore

$$\varinjlim_{Y \in C_X} D^b(\text{Coh}(Y)) \cong D^b(\text{Coh}(C_X)).$$

**Proposition.**  $f : Y \rightarrow Z$  is a finite birational morphism;  $\mathcal{F} \in \text{Coh}(Y), \mathcal{G} \in \mathcal{F}(Z)$ . Then  $f_* : \text{Ext}_Y^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Ext}_Z^1(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  is injective.

**Theorem.** For normal curve  $X$  we have

$$\text{gldim}(\text{Coh}(C_X)) = 1$$

## IMAGE SECTION

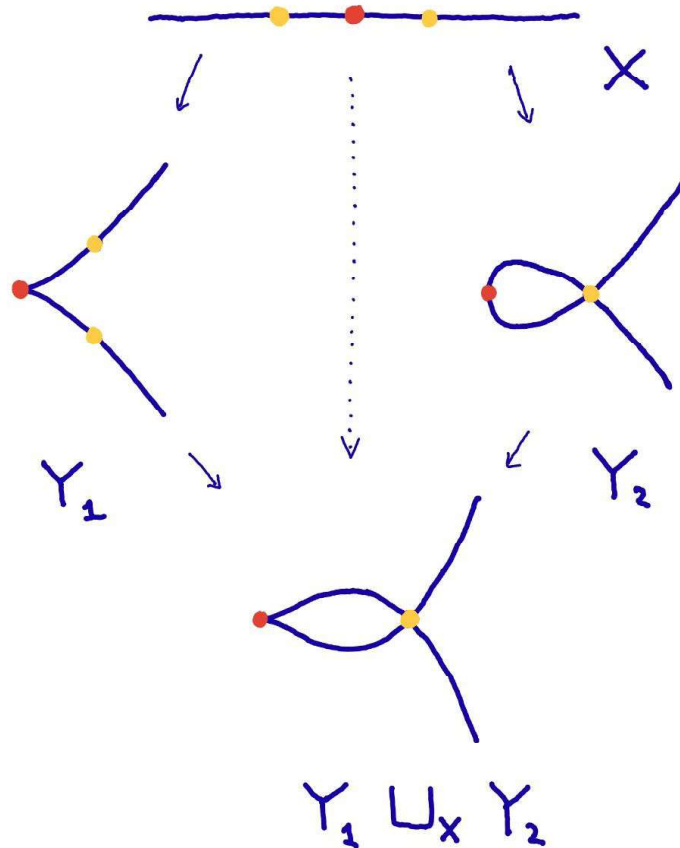


Figure 1: Coproduct of singular models of  $X$

## DUALITY ON $\text{CM}(C_X)$

Every reduced algebraic curve is Cohen–Macaulay. On reduced algebraic curve:

Maximal Cohen–Macaulay sheaves = torsion free sheaves

**Definition.**  $Y$  - reduced algebraic curve.  $\text{Hom}(-, \omega_Y) : \text{CM}(Y)^{op} \rightarrow \text{CM}(Y)$  is called dualizing functor  $\mathbb{D}_Y$ .

For torsion free sheaf  $F$  and finite morphism  $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ :

$$f_* \mathbb{D}_{Y_1}(F) = f_* \text{Hom}_{Y_1}(F, \omega_{Y_1}) = \text{Hom}_{Y_2}(f_* F, \omega_{Y_2}) = \mathbb{D}_{Y_2}(F)$$

This means that we have dualizing functor  $\mathbb{D} : \mathcal{F}(C_X)^{op} \rightarrow \mathcal{F}(C_X)$ .

It is not represented by an object of  $\text{Coh}(C_X)$ . It is represented by

$\omega_{C_X} :=$  sheaf of rational 1-forms with zero residues in every point.

## ACKNOWLEDGEMENT

I am grateful to my supervisor A. I. Bondal for his great help.

# Об одном классе взаимных расположений двух $M$ -кривых степени 4

Н. Д. Пучкова. Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"  
Нижний Новгород, Россия

В первой части 16-й проблемы Гильберта [1] поставлена задача топологической классификации неособых плоских вещественных алгебраических кривых. На данный момент известна классификация неособых кривых до седьмой степени включительно.

Данная работа посвящена задаче, примыкающей к этой проблеме: изучению топологии распадающихся алгебраических кривых. Именно, продолжается исследование, начатое в [2], [3], взаимных расположений в вещественной проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$  двух  $M$ -кривых степени 4, находящихся в максимальном общем положении, то есть при выполнении следующих условий: 1) эти две кривые являются  $M$ -кривыми; 2) все точки пересечения этих кривых лежат на одном овале одной кривой и на одном овале другой кривой; 3) точек пересечения максимальное число, т. е.  $4 \cdot 4 = 16$ ; 4) точки пересечения попарно различны.

**Определение 1.** Пусть овал  $O$  целиком лежит в аффинной плоскости<sup>1</sup>. Рассмотрим незамкнутую дугу без самопересечений, тоже целиком лежащую в аффинной плоскости и пересекающую овал  $O$  в восьми попарно различных точках. Эту дугу будем называть образующей дугой. При достаточно малом  $\varepsilon > 0$  граница  $\varepsilon$ -окрестности этой дуги представляет собой другой овал, который пересекает исходный овал  $O$  в 16 попарно различных точках. Этот второй овал будем называть змеей, а такое взаимное расположение двух овалов будем называть пересечением ветвей типа "змея, обвивающаяся вокруг овала".

**Определение 2.** Пусть в вещественной проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$  имеем пересечение двух овалов типа "змея, обвивающаяся вокруг овала" такое, что один (а, значит, и второй) конец образующей дуги лежит в диске, ограниченном овалом  $O$ . Отвечающую такой дуге змею назовём "змеей с концом внутри овала".

В данной работе будем исследовать змеи с концом внутри овала. Известные сведения об алгебраических кривых допускают 23 попарно негомеоморфных расположения овала и обвивающей его змеи с концом внутри овала. Для каждого такого расположения дополнение к пересекающимся овалам в  $\mathbb{R}P^2$  состоит из 18 компонент связности. В этих компонентах связности должны располагаться 6 овалов – по 3 для каждой из пересекающихся кривых. Количество допустимых попарно различных распределений овалов между этими областями зависит от топологии объединения пересекающихся овалов. При этом имеется ровно 7 расположений пересекающихся овалов, для каждого из которых есть ровно по 100 допустимых распределений овалов. Вопрос о реализуемости кривыми степени 8 именно этих  $7 \times 100 = 700$  расположений решается в этой работе. Именно, доказана следующая

**Теорема.** Существуют только 7 изотопических типов кривых степени 8 типа "змея с концом внутри овала", принадлежащих выделенному подклассу, показанные на рис. 1.

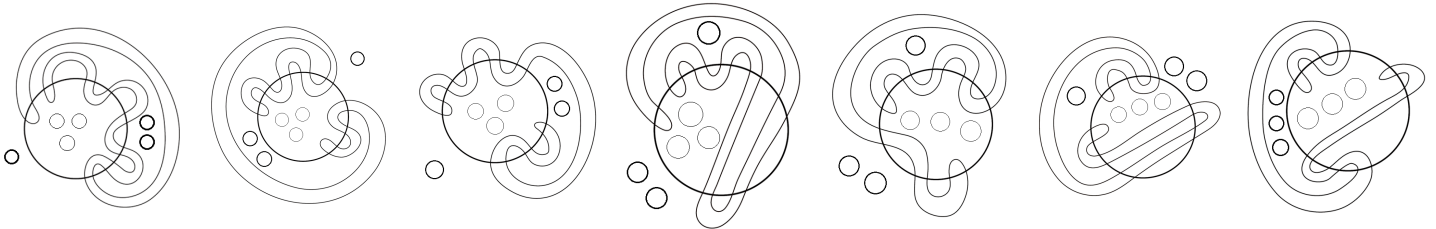


Рисунок 1

Запреты доказываются с помощью теоремы Безу и метода Оревкова [4], основанного на теории кос и зацеплений. Построения осуществлены методом малого параметра.

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Проблемы Гильберта (под редакцией П.С. Александрова). М.: Наука, 240 (1969).
2. Пучкова Н.Д. О взаимных расположениях двух  $M$ -кривых степени 4. Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры 222, 69–82 (2023).
3. Пучкова Н.Д. О расположениях двух  $M$ -кривых степени 4, овал одной из которых обвивается вокруг овала другой. Чебышевский сборник 24, № 3 (2023).
4. Orevkov S. Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curves. Topology 38 Vol. 4, 779–810 (1999).

<sup>1</sup>Для овала  $M$ -кривой степени 4 этого всегда можно добиться, выбрав в качестве бесконечно удаленной прямой аффинной плоскости слегка сдвинутую двойную касательную к этой кривой.

# Flow-up базис на сферических многообразиях

Alexandra Sonina, PDMI RAS

Будем рассматривать проективные полные гладкие многообразия над алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

Пусть на многообразии действует редуктивная группа  $G$ . Будем рассматривать следующий GKM-граф построенный по многообразию с действием группы:

Вершины - неподвижные точки под действием максимального тора  $T$  группы  $G$ , ребра - инвариантные кривые (на самом деле все будут изоморфны  $\mathbb{P}^1$ ). Метка на ребре - характер тора такой, что прямая становится неподвижной под относительно действия ядра этого характера.

Также на ребрах есть ориентация, которая получается из теоремы Бялыницкий — Бируля [3].

В работе [4] описаны классы Тодда и их построение для GKM-многообразия (отметим, что сферические многообразия далеко не всегда являются GKM).

В статье [2] описано что для  $u$  графа сферического многообразия из одной вершины будет выходить не более 2 ребер с одинаковой (с точностью до умножения на константу) меткой, притом каждая пара таких ребер входит либо в треугольник (что соответствует подмногообразию изоморфному  $\mathbb{P}^2$ ), либо в четырехугольник совпадающий с графом для поверхности Хирцебруха  $\mathbb{F}_\alpha$ . Заметим также что отсюда мы знаем и ориентацию на ребрах этого четырехугольника (она будет поточная от левого верхнего угла к правому нижнему после перенумерации вершин). Также из статьи [2] для расстановок на треугольнике и четырехугольнике мы получаем следующее условие делимости:

Пусть характер написанный на ребре будет равен  $\alpha$

## Случай $\mathbb{P}^2$

Пусть вершины упорядочены  $x \geq y \geq z$ , тогда у нас будет условие, что  $f_x - 2f_y + f_z \equiv 0 \pmod{\alpha^2}$ , откуда следует что если  $f_z$  и  $f_y$  это нули, то  $f_x$  делится на  $\alpha^2$

### Случай $\mathbb{F}_n$ (включая случай $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ )

Исходный тор ранга два имел две порождающие группы характеров  $\eta$  и  $\epsilon$ . Тор ранга один является подтором максимального, а значит его решетка характеров получается из решетки характеров максимального занулением одного из характеров  $a\epsilon - b\eta$ .

Пусть вершины упорядочены  $w \geq x \geq y \geq z$ , тогда у нас будет условие  $f_w - f_x - \frac{b}{b+na}f_y + \frac{b}{b+na}f_z \equiv 0 \pmod{\alpha^2}$ , откуда следует что если  $f_x, f_y$  и  $f_z$  это нули, то  $f_w$  делится на  $\alpha^2$

Назовем расстановку многочленов от характеров тора в вершинах ГKM-графа правильной, если разность многочленов в вершинах делится на метку на ребре, их соединяющем (если такое ребро существует), а также выполняются квадратичные соотношения, описанные выше.

**Определение.** Будем называть систему правильных расстановок многочленов *flow-up базисом*, если

- 1 Эта система расстановок — базис над  $CH_T^*(X)$
- 2 Для всех вершин  $w$  существует элемент системы расстановок такой, что в этой расстановке в вершине  $w$  стоит произведение меток ребер, выходящих из этой вершины, а ненулевые элементы могут стоять только в вершинах  $v$  с  $v \geq w$ .

**Определение.** Пусть  $G$  — редуктивная группа и  $B \subset G$  — Борелевская подгруппа.  $G$ -многообразие  $X$  будем называть *сферическим*, если в  $X$  есть плотная  $B$ -орбита.

Основным результатом работы является доказательство наличия flow-up базиса у любого сферического многообразия.

## Список литературы

- [1] M. Brion. *Equivariant Chow groups for torus actions*. Transformation Groups, Vol. 2, No. 3, 1997, pp. 225-267.
- [2] Henry July *Algebraic cobodism of spherical varieties* Thesis
- [3] P.Brosnan *On motivic decompositions arising from the method of Bialynitskii-Birula*
- [4] V.Guillemain and C.Zara *One-skeleta betti numbers and equivariant cohomology*

# Задача Штейнера о пяти кониках

Шатова Ирина, НИУ ВШЭ

## 1 Введение

В 1848 году швейцарский математик Якоб Штейнер поставил задачу, которую на современном языке можно переформулировать так: сколько коник касаются пяти гладких коник общего положения?

Первый шаг – рассмотреть пространство модулей коник, изоморфное  $\mathbb{P}^5$ , а затем для каждой коники составить уравнение, нулями которого будут в точности те коники, которые касаются данной. Эти уравнения будут, как окажется, задавать в  $\mathbb{P}^5$  гиперповерхности степени 6. На этом этапе естественно попытаться воспользоваться теоремой Безу и, перемножив степени гиперповерхностей, получить ответ:  $6^5 = 7776$  коник. Но этот результат неверен: в данной ситуации теорема неприменима, потому что полученные гиперповерхности пересекаются нетрансверсально: каждая из них целиком содержит поверхность двойных прямых – поверхность Веронезе.

## 2 Раздутие, классы Черна и кольца Чжоу

**Определение-предложение.** Пусть  $X$  – схема,  $Z \subset X$  – замкнутая подсхема и  $\mathcal{C}$  – полная подкатегория в категории схем над  $X$ , состоящая из таких  $f : Y \rightarrow X$ , что  $f^{-1}(Z) \subset Y$  – эффективный дивизор Картье. Тогда в  $\mathcal{C}$  существует терминальный объект  $\sigma : \text{Bl}_Z(X) \rightarrow X$ , который называется раздутием  $X$  вдоль  $Z$ . Подсхема  $E = \sigma^{-1}(Z) \subset \text{Bl}_Z(X)$  называется исключительным дивизором раздутия, и  $E \cong \mathbb{P}(\mathcal{N}_{Z|X})$ , где  $\mathcal{N}_{Z|X}$  – нормальное расслоение к  $Z$  в  $X$ .

**Определение.** Пусть  $X$  – схема,  $Y \subset X$  – подсхема и  $\sigma : \text{Bl}_Y(X) \rightarrow X$  – раздутие  $X$  вдоль  $Y$ . Если  $X' \subset X$  – замкнутая подсхема, то  $W = \overline{\sigma^{-1}(X' \setminus (X' \cap Y))}$  называется собственным прообразом  $X'$ .

**Определение.** Пусть  $\mathcal{L}$  – линейное расслоение на проективной над полем схеме  $X$ . Тогда первым классом Черна  $c_1(\mathcal{L})$  линейного расслоения  $\mathcal{L}$  называется класс эквивалентности дивизора  $s$ , где  $s$  – ненулевое рациональное сечение  $\mathcal{L}$ .

Обозначим теперь  $C_i, i = 1, \dots, 5$  данные пять гладких коник, а  $Q_i \subset \mathbb{P}^5, i = 1, \dots, 5$  – гиперповерхности, определяющие коники, касающиеся заданных. Тогда верно

**Предложение 1.** Собственные прообразы  $\tilde{Q}_i \subset \text{Bl}_V(\mathbb{P}^5), i = 1, \dots, 5$  – гиперповерхностей  $Q_i$  не пересекаются внутри исключительного дивизора раздутия и пересекаются трансверсально вне него.

Таким образом, конструкция раздутия позволяет избавиться от избыточного пересечения и задача сводится к подсчету количества точек пересечения собственных прообразов  $\tilde{Q}_i$  уже на раздутии. С этим очень помогают кольца Чжоу – кольца, элементы которого есть классы алгебраических циклов, умножение которых определяется в терминах пересечений. Кольцо Чжоу многообразия  $X$  будем обозначать  $A(X)$ . Верно, например, что кольцо Чжоу проективного пространства  $\mathbb{P}^n$  изоморфно  $A(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}[\xi]/(\xi^{n+1})$ , где  $\xi$  – класс гиперплоскости, иначе говоря,  $\xi = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ . Очень важно следующее

**Определение-предложение.** Пусть  $E$  – векторное расслоение ранга  $r$  на гладком многообразии  $X$ , тогда кольцо Чжоу проективизации этого расслоения изоморфно  $A(\mathbb{P}(E)) \cong A(X)[\zeta]/(f(\zeta))$ , а классами Черна  $c_i(E)$  называются такие (единственным образом определенные) элементы из кольца  $A(X)$ , что  $f(\zeta) = \zeta^r + \pi^*c_1(E)\zeta^{r-1} + \dots + \pi^*c_r(E)$ , где  $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$  и  $\zeta = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))$  – первый класс Черна расслоения  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ .

Пусть теперь  $X$  – многообразие,  $i : Y \hookrightarrow X$  – замкнутое вложение,  $\text{codim}_X Y = r$ ,  $\sigma : \text{Bl}_Y(X) \rightarrow X$  – раздутие  $X$  вдоль  $Y$ , тогда  $E = \sigma^{-1}(Y) \cong \mathbb{P}(\mathcal{N}_{Y|X})$  – исключительный дивизор раздутия,  $\mathcal{N}_{Y|X}$  – нормальное расслоение к  $Y$  в  $X$ . Имеется следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{j} & \text{Bl}_Y(X) \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \sigma \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

Рассмотрим кольцо  $A(E) \oplus A(X) \cong A(Y)[\zeta]/(\zeta^r + c_1(V)\zeta^{r-1} + \dots + c_r(V)) \oplus A(X)$ . Определим в нём новое умножение по следующим правилам:  $(z_1, 0) \star (z_2, 0) = (-z_1 \cdot z_2 \cdot \zeta, 0)$ ;  $(0, z_1) \star (0, z_2) = (0, z_1 \cdot z_2)$ ;  $(z_1, 0) \star (0, z_2) = (z_1 \cdot \pi_E^*(i^*(z_2)), 0)$ , здесь  $\zeta = c_1(\mathcal{O}_E(1))$ , а  $\cdot$  обозначает старое умножение в кольцах.

**Предложение 2.** В описанной ситуации имеется точная последовательность колец:

$$0 \rightarrow A(Y) \xrightarrow{\alpha} A(E) \oplus A(X) \xrightarrow{\beta} A(\text{Bl}_Y(X)) \rightarrow 0,$$

умножение в кольцах  $A(Y)$  и  $A(\text{Bl}_Y(X))$  обычное, а в кольце  $A(E) \oplus A(X)$  умножение  $\star$  определено выше; гомоморфизмы  $\alpha$  и  $\beta$  определяются правилами:  $z \xrightarrow{\alpha} (-\pi_E^*(z) \cdot c_{r-1}(\xi), i_*(z))$ ;  $(z_1, z_2) \xrightarrow{\beta} j_*(z_1) + \sigma^*(z_2)$ ,  $\xi$  – тавтологическое фактор-расслоение на  $E$ .

### 3 Вычисление количества касательных коник

В нашей задаче диаграмма будет такой:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{j} & \text{Bl}_V(\mathbb{P}^5) \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathbb{P}^2 \cong V & \xrightarrow{i_V} & \mathbb{P}^5 \end{array}$$

Вычисления показывают, что полный класс Черна для нормального расслоения  $\mathcal{N}_{V|\mathbb{P}^5}$  равен  $c(\mathcal{N}_{V|\mathbb{P}^5}) = 1 + c_1(\mathcal{N}_{V|\mathbb{P}^5}) + c_2(\mathcal{N}_{V|\mathbb{P}^5}) + c_3(\mathcal{N}_{V|\mathbb{P}^5}) = 1 + 9q + 30q^2 + 42q^3$ , а тогда  $A(E) \cong \mathbb{Z}[q, \zeta]/(q^3, \zeta^3 + 9q\zeta^2 + 30q^2\zeta)$ , где  $\zeta = c_1(\mathcal{O}_E(1))$ , а  $q$  – класс гиперплоскости в кольце  $A(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}[q]/(q^3)$ . Кроме того, для тавтологического фактор-расслоения  $\xi$  находится  $c_2(\xi) = 30q^2 + 9q\zeta + \zeta^2$ , откуда формула для гомоморфизма  $\alpha$  из предложения 2 такова:  $z \mapsto (-\pi_E^*(z) \cdot (30q^2 + 9q\zeta + \zeta^2), i_*(z))$ .

Точность последовательности с кольцами Чжоу даёт соотношения в кольце  $A(\text{Bl}_V(\mathbb{P}^5))$ , из которых можно получить все нужные соотношения, например, так как  $h^5 = [pt]$  – класс, соответствующий точке, и  $\beta(\alpha(q^2)) = j_*(-q^2\zeta^2) + \sigma^*(h^5) = 0$ , то  $j_*(q^2\zeta^2) = [pt]$ . В том же духе получаем:  $j_*(q\zeta^3) = -9[pt]$ ,  $j_*(\zeta^4) = 51[pt]$ .

В кольце Чжоу раздутия  $\text{Bl}_V(\mathbb{P}^5)$  две образующих:  $\sigma^*(h)$  и  $j_*(1)$  переобозначим их  $[\tilde{H}]$  и  $[E]$ , то есть теперь  $[\tilde{H}]$  обозначает класс  $\tilde{H} = \pi^{-1}(H)$  прообраза гиперповерхности  $H \not\subseteq V$ , а  $[E]$  обозначает класс исключительного дивизора. Из проделанных вычислений и правил умножения в кольцах можно получить, что  $[\tilde{H}]^5 = [pt]$ ,  $[\tilde{H}]^4[E] = 0$ ,  $[\tilde{H}]^3[E]^2 = 0$ ,  $[\tilde{H}]^2[E]^3 = 4[pt]$ ,  $[\tilde{H}][E]^4 = 18[pt]$ ,  $[E]^5 = 51[pt]$ .

Если  $Y$  – произвольная гиперповерхность, заданная многочленом  $F$  степени  $k$ , содержащая поверхность Веронезе  $V$ , то  $[\pi^{-1}(Y)] = [\tilde{Y}] + l[E]$ , и, так как  $[\pi^{-1}(Y)] = k[\tilde{H}]$ , получаем, что  $[\tilde{Y}] = k[\tilde{H}] - l[E]$ . Оказывается, что коэффициент  $l$  равен порядку нуля многочлена  $F$  вдоль ногообразия Веронезе  $V$ . Из этих соображений получаем, что  $[\tilde{Q}_i] = 6[\tilde{H}] - 2[E]$ . Поэтому ответом к задаче будет  $(6[\tilde{H}] - 2[E])^5 = 32(243[\tilde{H}]^5 - 405[\tilde{H}]^4[E] + 270[\tilde{H}]^3[E]^2 - 90[\tilde{H}]^2[E]^3 + 15[\tilde{H}][E]^4 - [E]^5) = 32 \cdot 102[pt] = 3264[pt]$ .